DIE

HAUPT- UND BRENN-PUNCTE

EINES

LINSEN-SYSTEMES.

SURGEONS OF ENGLAND

DIE

HAUPT- UND BRENN-PUNCTE

EINES

LINSEN-SYSTEMES.

ELEMENTARE DARSTELLUNG DER DURCH GAUSS BEGRÜNDETEN THEORIE

VON

CARL NEUMANN,

DOCTOR DER PHILOSOPHIE UND NATURWISSENSCHAFT, ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK ZU TÜBINGEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1866.

VORWORT.

Von der Art und Weise, wie die Richtungen der Lichtstrahlen bei ihrem Durchgange durch ein Linsensystem (z. B. durch ein Fernrohr oder Mikroskop) sich ändern, und von den Bildern, welche in Folge dessen an Stelle der leuchtenden Gegenstände selber unserer Wahrnehmung entgegentreten, hat man schon seit langer Zeit sich Rechenschaft zu geben gewusst. In der That war es keine schwierige Aufgabe, den Gang der Lichtstrahlen von einer Linse zur andern mit Hülfe der Rechnung zu verfolgen, und in solcher Weise schliesslich auch diejenigen Bahnen zu ermitteln, welche den Lichtstrahlen zu Theil werden bei ihrem Austritt aus der letzten Linse. Es war eine Aufgabe, die mit einiger Geduld leicht zu lösen war, die aber zu wenig übersichtlichen Resultaten führte, zu Resultaten, welche nur durch Formeln darstellbar waren, der Anschauung aber unzugänglich blieben.

Gauss war es vorbehalten, auch in diesem Gebiete einen entscheidenden Schritt vorwärts zu thun, und für jene complicirten Formeln eine geometrische Darstellung zu finden von überraschend einfacher Art.*)

Gauss zeigte, dass ein beliebig gegebenes Linsensystem immer vier ihm eigenthümliche (in seiner Axe liegende) Fundamentalpuncte besitzt, und zeigte ferner, dass die Aenderung, welche ein Lichstrahl bei Durchlaufung des

*) Gauss: Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1840.

Linsensystems in seiner Richtung erleidet, durch eine einfache geometrische Construction bestimmt werden kann, falls nur jene vier Fundamentalpuncte bekannt sind. Von diesen vier Puncten sind zwei identisch mit den sogenannten Brennpuncten, also identisch mit Puncten, auf die man schon früher aufmerksam geworden war. Die beiden andern waren neu; sie wurden die Hauptpuncte genannt.

Von besonderer Wichtigkeit war, dass die in Rede stehende geometrische Construction nicht nur angewendet werden konnte bei einem gewöhnlichen überall von Luft umgebenen Linsensystem, sondern ebenso gut auch anwendbar war auf dioptrische Apparate von mehr allgemeiner Beschaffenheit, z. B. auf den Sehapparat des menschlichen Auges.

Diese von Gauss entwickelte Theorie wurde später weiter vervollkommnet durch Hinzufügung von noch zwei anderen Fundamentalpuncten, nämlich durch die von Möbius entdeckten Knotenpuncte.*)

In neuerer Zeit ist ferner noch eine Arbeit von Maxwell**) zu erwähnen, in welcher die Theorie mehr zu vereinfachen gesucht wird. Die Methoden, deren sich Maxwell bedient, um solches zu erreichen, sind zum Theil sehr beachtenswerth; sie beruhen zum Theil auf der Anwendung folgender Sätze:

I. Die Puncte, bis zu welchen Strahlen, die von ein und demselben leuchtenden Punct ausgehen, in gleicher Zeit vordringen, bilden eine Fläche, gegen welche die Strahlen selbst senkrecht stehen, welches auch die Anzahl

---

*) Möbius: Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systemes von Linsengläsern. Crelle's Journal, Band 5, Seite 113. Für den Fall eines gewöhnlichen überall von Luft umgebenen Linsensystemes sind übrigens, wie sogleich bemerkt werden mag, die Knotenpuncte identisch mit den Hauptpuncten. Verschieden von den Hauptpuncten, und demnach von Bedeutung sind die Knotenpuncte nur dann, wenn man an Stelle eines gewöhnlichen Linsensystems einen dioptrischen Apparat von mehr allgemeiner Beschaffenheit (wie z. B. den Sehapparat des menschlichen Auges) in Betrachtung zieht.

**) Maxwell: On the general laws of optical instruments. Quarterly Journal of pure and applied mathematics, by Sylvester, Ferrers, etc. London 1858. Pag. 233—246.

und wie auch die Beschaffenheit der von den Strahlen durchlaufenen durchsichtigen Körper sein mag (vorausgesetzt, dass unter denselben kein krystallinischer Körper enthalten ist).

II. Vereinigen sich Strahlen, die von ein und demselben leuchtenden Punct ausgegangen sind, wieder in einem gemeinsamen Focus, so ist die Zeit, welche die Strahlen gebrauchen, um von jenem Punct nach diesem Focus zu gelangen, für sämmtliche Strahlen von gleicher Länge.

Wie elegant diese Sätze aber auch sein mögen, im Allgemeinen sind sie wenig bekannt, zu einer elementaren Darstellung der Gauss'schen Theorie also auch wenig geeignet. Ueberhaupt scheint mir die in Rede stehende Theorie immer noch nicht diejenige Einfachheit, und in Folge dessen auch nicht diejenige Verbreitung gewonnen zu haben, deren sie ihrer Natur nach fähig ist.

Die vorliegende Untersuchung setzt mit Ausnahme der ebenen Trigonometrie fast gar keine mathematischen Kenntnisse voraus, und wird also zeigen, dass jene Theorie entwickelt werden kann mit einem äusserst geringen Aufwande mathematischer Hülfsmittel. Sie wird ausserdem, glaube ich, zeigen, dass die hier in Anwendung gebrachten elementaren Methoden zur Entwickelung der Theorie nicht nur ausreichend sind, sondern auch wesentlich dazu beitragen, um diese Entwickelung Schritt für Schritt der unmittelbaren Anschauung zugänglich zu machen. Letzterer Umstand ist es hauptsächlich, der mich veranlasst, meine Untersuchung zu veröffentlichen.

Tübingen, 11. Februar 1866.

Der Verfasser.

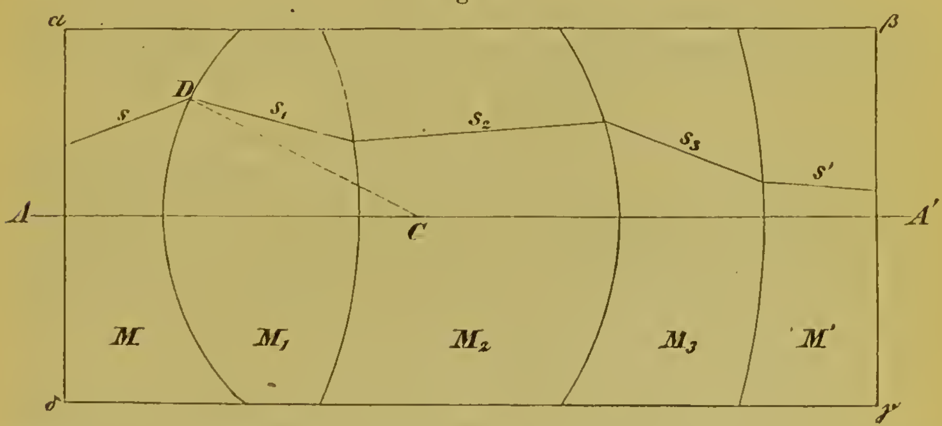
INHALT.

§ 1. Angabe des allgemeinen Problemes, um dessen Lösung es sich handelt.

Der Cylinder $\alpha\beta\gamma\delta$, dessen Achse durch die Linie AA' dargestellt wird (Fig. 1), sei zusammengesetzt aus beliebig vielen durchsichtigen Körpern, welche der Reihe nach mit M, M_1, M_2, u. s. w., der letzte mit M' bezeichnet werden mögen. Wir nehmen an, dass die Flächen, in welchen je zwei solche Körper an einander grenzen, Kugelflächen sind, und dass die Centra dieser Kugelflächen sämmtlich in der Achse des Cylinders liegen*).

Die Aufgabe, mit der wir uns beschäftigen wollen, besteht

Fig. 1.



nun in der Untersuchung des Weges, den irgend ein Lichtstrahl verfolgen wird, wenn er diesen Cylinder seiner Länge nach durchschreitet, besteht also in der Untersuchung derjenigen Linien

*) Bestehen die Körper M, M_1, M_2, ... M' abwechselnd aus Luft und Glas, so verwandelt sich der Cylinder in ein System von auf einander folgenden Linsen, wie es bei Fernröhren, Mikroskopen, u. s. w. vorhanden ist. Ein solches Linsensystem ist demnach nur ein speciel-ler Fall des von uns betrachteten Cylinders, also ein Fall, auf welchen die Resultate, zu denen wir bei unserer Untersuchung gelangen werden, unmittelbar in Anwendung gebracht werden können.

s, s_1, s_2, ... s', durch welche der ebengenannte Weg in den einzelnen Körpern M, M_1, M_2, ... M' der Reihe nach dargestellt sein wird. Unser Hauptaugenmerk werden wir dabei richten auf die erste und letzte Linie, also auf die Linien s und s'. Wir werden für die gegenseitige Abhängigkeit, welche zwischen der Lage von s einerseits und der von s' andererseits stattfindet, ein möglichst anschauliches Bild zu gewinnen suchen; und in der That werden wir schliesslich zu äusserst einfachen, rein geometrischen Vorstellungen gelangen, durch welche jene Abhängigkeit ihren Ausdruck findet, und durch welche wir in den Stand gesetzt werden, für jede gegebene Linie s die zugehörige Linie s' zu construiren.

Die Kugelflächen, durch welche je zwei der Körper M, M_1, M_2, ... M' von einander getrennt sind, mögen die brechenden Flächen heissen; und gleichzeitig mögen diejenigen Puncte dieser Flächen, welche in der Achse AA' liegen, die Scheitelpuncte der Flächen genannt werden.

Wir werden bei unserer Untersuchung (ebenso, wie Gauss es gethan hat) nicht vollkommen strenge verfahren, sondern gewisse Voraussetzungen eintreten lassen, durch welche ein annäherndes Verfahren möglich wird. Diese Voraussetzungen sind folgende:

Erste Voraussetzung. Die Winkel, unter welchen (Fig. 1) die Linien s, s_1, s_2, ... s' gegen die Achse geneigt sind, besitzen sämmtlich eine solche Kleinheit, dass ihre zweiten und höheren Potenzen vernachlässigt werden können, dass mithin die Sinus und Tangenten dieser Winkel als gleich gross betrachtet werden können mit den Winkeln selber*).

---

*) Unter dem Winkel selber verstehen wir, wie es üblich ist, einen Kreisbogen vom Radius 1, welcher von dem einen Schenkel des Winkels zum andern reicht, und welcher seinen Mittelpunct im Scheitelpunct des Winkels hat. Bezeichnen wir nun irgend einen Winkel mit φ, verstehen wir also unter φ die Länge des eben genannten Bogens, so gelten bekanntlich folgende Formeln:

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots.$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - + \ldots.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Ist demnach der

Zweite Voraussetzung. Sind C, C_1, C_2, ... die (auf der Achse befindlichen) Centra der auf einander folgenden brechenden Flächen, sind ferner D, D_1, D_2, ... diejenigen Punkte, in welchen diese Flächen von dem betrachteten Lichtstrahl der Reihe nach getroffen werden, und sind also (vergl. Fig. 1) CD, C_1D_1, C_2D_2, ... die nach den eben genannten Puncten hinlaufenden Radien, so soll vorausgesetzt werden, dass die Winkel, unter welchen diese Radien gegen die Achse geneigt sind, ebenfalls so klein sind, dass ihre Sinus und Tangenten als gleich gross angesehen werden können mit den Winkeln selber.

Die einfachen geometrischen Resultate, von welchen vorhin die Rede war, sind nur dann zu erreichen, wenn die eben genannten Voraussetzungen zu Grunde gelegt werden. Auf Fälle, wo diese Voraussetzungen nicht zulässig sind, werden jene Resultate also auch keine Anwendung finden können.

Wir beschäftigen uns zunächst mit nur zwei Körpern, mit den Körpern M und M_1, und haben dann also nur eine brechende Fläche, nämlich die Trennungsfläche zwischen M und M_1 zu betrachten.

§ 2. Der Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche.

Es sei (Fig. 2) XX_1 die Achse, S der Scheitelpunct, und C das Centrum der brechenden Fläche; ferner seien M und M_1 die beiden Körper, welche in der eben genannten Fläche an einander grenzen. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Licht im Körper M fortpflanzt, wird im Allgemeinen verschieden sein von derjenigen, mit welcher seine Fortpflanzung im Körper M_1 erfolgt. Diese Geschwindigkeiten betrachten wir als gegeben, und bezeichnen sie mit m und m_1. Desgleichen betrachten wir als

---

Winkel φ so klein, dass seine zweite und höheren Potenzen zu vernachlässigen sind, so erhält man:

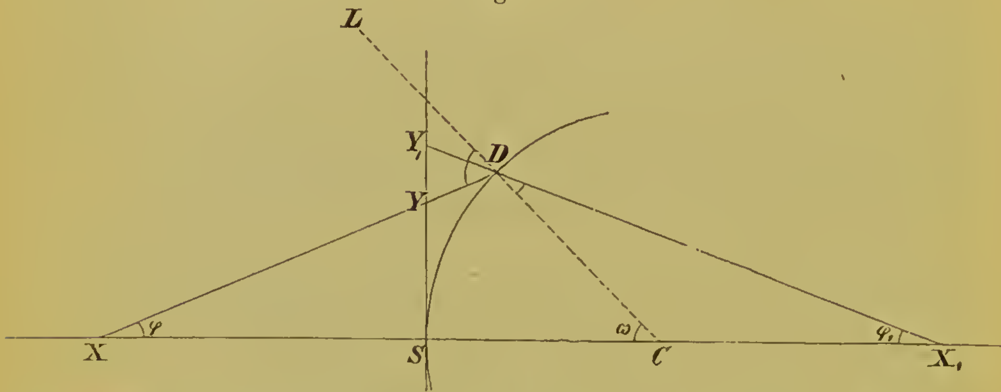
$$\sin\varphi = \varphi,$$
$$\cos\varphi = 1,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \varphi.$$

Und hiermit ist die oben gemachte Behauptung gerechtfertigt, nämlich nachgewiesen, dass $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ gleich gross sein werden mit φ selber, sobald die eben genannten Vernachlässigungen gestattet sind.

gegeben den Radius CS der brechenden Fläche; er mag bezeichnet werden mit a.

Wir beschäftigen uns mit irgend welchem Strahl, der aus dem Körper M übergeht in den Körper M_1. Es sei XD die

Fig. 2.



Richtung, in welcher derselbe im Körper M fortgeht, und DX_1 diejenige, welche demselben nach erlittener Brechung im Körper M_1 zu Theil wird. Das Loth der brechenden Fläche im Durchgangspunct D wird dargestellt sein durch den Radius CDL. Gleichzeitig werden der Einfalls- und Brechungswinkel dargestellt sein durch diejenigen Winkel, unter welchem die Linien XD und DX_1 geneigt sind gegen das eben genannte Loth. Bekanntlich verhalten sich die Sinus dieser beiden Winkel ebenso zu einander, wie die Geschwindigkeiten, mit welchen sich das Licht fortpflanzt in den Körpern M und M_1. Bezeichnen wir demnach den Einfallswinkel mit δ und den Brechungswinkel mit δ_1, so ist:

(1) . . . . $\sin\delta : \sin\delta_1 = m : m_1$.

In einem Dreieck verhalten sich die Sinus zweier Winkel wie die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten. Somit folgt aus dem Dreieck XCD:

(2) . . . . . . $\sin\delta : \sin\varphi = CX : CD = x + a : a$;

und andrerseits aus dem Dreieck X_1CD:

(3) . . . . . $\sin\delta_1 : \sin\varphi_1 = CX_1 : CD = x_1 - a : a$.

Hier sind unter x, x_1 die Abstände der Puncte X, X_1 vom Scheitelpunct S zu verstehen.

Ausserdem ergiebt sich aus den genannten Dreiecken:

$$\delta = \omega + \varphi,$$
$$\delta_1 = \omega - \varphi_1.$$

Substituirt man diese Werthe von δ und δ_1 in die Proportionen (1), (2), (3), so folgt:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin(\omega + \varphi) : \sin(\omega - \varphi_1) &= m : m_1, \\ \sin(\omega + \varphi) : \sin\varphi &= x + a : a, \\ \sin(\omega - \varphi_1) : \sin\varphi_1 &= x_1 - a : a. \end{aligned}$$

In Folge der im vorhergehenden § gemachten Voraussetzungen sind die Winkel φ, φ_1, ω, desgleichen auch die Winkel $\omega + \varphi$, $\omega - \varphi_1$ von solcher Kleinheit, dass die Sinus dieser Winkel ebenso gross sind, wie die Winkel selber. Demnach können die Formeln (4) einfacher geschrieben werden in folgender Weise:

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega + \varphi : \omega - \varphi_1 &= m : m_1, \\ \omega + \varphi : \varphi &= x + a : a, \\ \omega - \varphi_1 : \varphi_1 &= x_1 - a : a. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Proportionen folgt, wenn wir die Productengleichungen bilden:

$$\begin{aligned} (x + a)\,\varphi &= a\,(\omega + \varphi), \\ (x_1 - a)\,\varphi_1 &= a\,(\omega - \varphi_1), \end{aligned}$$

d. i.

$$(6) \quad \begin{aligned} x\,\varphi &= a\,\omega, \\ x_1\,\varphi_1 &= a\,\omega. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich $\varphi = \frac{a\omega}{x}$ und $\varphi_1 = \frac{a\omega}{x_1}$. Substituirt man diese Werthe in die erste der Proportionen (5), so erhält man:

$$\omega + \frac{a\omega}{x} : \omega - \frac{a\omega}{x_1} = m : m_1,$$

oder, wenn man durch ω hebt:

$$1 + \frac{a}{x} : 1 - \frac{a}{x_1} = m : m_1.$$

Diese Proportion verwandelt sich, wenn man die Productengleichung bildet, in:

$$m_1\left(1 + \frac{a}{x}\right) = m\left(1 - \frac{a}{x_1}\right),$$

d. i. in:

$$\frac{m_1 a}{x} + \frac{m a}{x_1} = m - m_1,$$

oder in:

$$(7) \quad \left(\frac{m_1 a}{m - m_1}\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{m a}{m - m_1}\right)\frac{1}{x_1} = 1.$$

Die Grössen a, m, m_1 sind gegebene Constanten. Die hier in Klammer gesetzten Brüche sind demnach ebenfalls Constante, und zwar Constante, deren Zahlenwerthe augenblicklich berechnet werden können, sobald die Zahlenwerthe von a, m, m_1 bekannt sind. Wir bezeichnen die durch diese Brüche dargestellten Constanten mit b und b_1, setzen also:

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad b = \frac{am_1}{m - m_1}, \quad b_1 = \frac{am}{m - m_1},$$

und können alsdann die Gleichung (7) in folgender Weise darstellen:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{b}{x} + \frac{b_1}{x_1} = 1.$$

Ausser den Constanten b und b_1 sind in dieser Gleichung noch zwei andere Grössen enthalten, nämlich x und x_1. Diese letzteren bezeichnen die Abstände der Punkte X und X_1 vom Scheitelpunct S, und sind also Grössen, die demjenigen Strahle XDX_1 zugehören, welchen wir hier betrachten, folglich Grössen, deren Werthe sich ändern, wenn wir an Stelle dieses Strahles irgend welchen andern Strahl nehmen. Mit einem Wort: b, b_1 sind constante, x, x_1 hingegen variable Grössen. Die Gleichung (9) ist demnach als eine Relation anzusehen, welche stattfindet zwischen den beiden Variablen x und x_1, als eine Relation, welche uns in den Stand setzt, die eine dieser beiden Variablen zu berechnen, falls die andere gegeben ist.

Von den beiden Theilen XD und DX_1, aus welchen der betrachtete Strahl besteht, nennen wir der Kürze willen den erstern den einfallenden, den letztern den gebrochenen Strahl. Ist der einfallende Strahl gegeben, so ist x bekannt. Wir können daher vermittelst der Relation (9) das zugehörige x_1 berechnen, folglich die Lage des Punctes X_1 ermitteln. Hiermit aber wird dann die Lage der Linie DX_1, d. i. die Lage des gebrochenen Strahles ebenfalls ermittelt sein. Die Relation (9) ist daher von grosser Wichtigkeit. Sie dient, um den **gebrochenen** Strahl zu finden, falls der **einfallende** gegeben ist; oder auch umgekehrt, um den **einfallenden** zu ermitteln, wenn der **gebrochene** gegeben ist.

Wir wollen annehmen, es seien unendlich viele einfallende Strahlen gegeben, welche sämmtlich von ein und demselben Punct, nämlich sämmtlich von X ausgehen. Diese Strahlen mögen bezeichnet werden mit XD, XE, XF, ... ; wo D, E, F, ... diejenigen Puncte vorstellen sollen, in welchen die Strahlen auffallen auf die brechende Fläche. All diese Strahlen haben alsdann ein und dasselbe x. Demnach wird sich aus der Relation (9) für all diese Strahlen auch ein und dasselbe x_1, d. i. ein und derselbe Punct X_1 ergeben. Ist dieser Punct ermittelt, so werden dann schliesslich die gebrochenen Strahlen dargestellt sein durch die Linien DX_1, EX_1, FX_1, ... Die gebrochenen Strahlen werden also sämmtlich durch X_1 gehen. Somit erhalten wir folgenden Satz:

(10) ... *Strahlen, die von ein und demselben, in der Achse gelegenen Punct auslaufen, werden sich nach erlittener Brechung jederzeit wiederum in einem einzigen Punct vereinigen, und zwar in einem Punct, der ebenfalls in der Achse liegt. Die Entfernungen x und x_1, in welchen zwei solche Puncte zu beiden Seiten des Scheitelpunctes liegen, sind mit einander verbunden durch die Relation:*

$$\frac{b}{x} + \frac{b_1}{x_1} = 1.$$

Hier bedeuten b und b_1 die in (8) *angegebenen Constanten.*

Für $x = \infty$ ergiebt sich aus dieser Relation $x_1 = b_1$. Demnach werden sich alle Strahlen, welche ausgehen vom Puncte $x = \infty$, nach erlittener Brechung vereinigen im Puncte $x_1 = b_1$. Mit andern Worten: Alle Strahlen, welche parallel mit der Achse auf die brechende Fläche fallen, vereinigen sich nach erlittener Brechung in einem Punct, der in der Achse liegt, und der vom Scheitelpunct die Entfernung b_1 hat.

Wir bringen die Relation (10) von Neuem in Anwendung, und setzen in derselben $x_1 = \infty$. Alsdann ergiebt sich $x = b$. Demnach werden alle Strahlen, die vom Puncte $x_1 = \infty$ auf die brechende Fläche fallen, nach erlittener Brechung sich vereinigen im Puncte $x = b$. Also:

(11) ... *Denkt man sich beliebig viele, etwa unendlich viele Strahlen, welche sämmtlich mit der Achse parallel laufen, so werden sich diese Strahlen, jenachdem sie von der einen oder von der andern Seite her auf die brechende Fläche fallen, nach erlittener Brechung entweder vereinigen im Puncte $x = b$, oder vereinigen im Puncte $x_1 = b_1$. Demgemäss*

werden diese Puncte die beiden **Brennpuncte** *der brechenden Fläche genannt. Die in* (8) *angegebenen Constanten:*

$$b = \frac{a m_1}{m - m_1}$$

$$b_1 = \frac{a m}{m - m_1}$$

repräsentiren also die Entfernungen der beiden Brennpuncte vom Scheitelpunct. Diese Entfernungen werden die **Brennweiten** *genannt**).

Wir betrachten von Neuem irgend einen Strahl, der aus dem Körper M übergeht in den Körper M_1. Es sei (Fig. 4) XY die anfängliche Richtung dieses Strahles, und $Y_1 X_1$ seine spätere Richtung, nämlich diejenige, welche ihm zu Theil wird nach erlittener Brechung. Zwischen den Puncten X und X_1 findet dann folgende Beziehung statt:

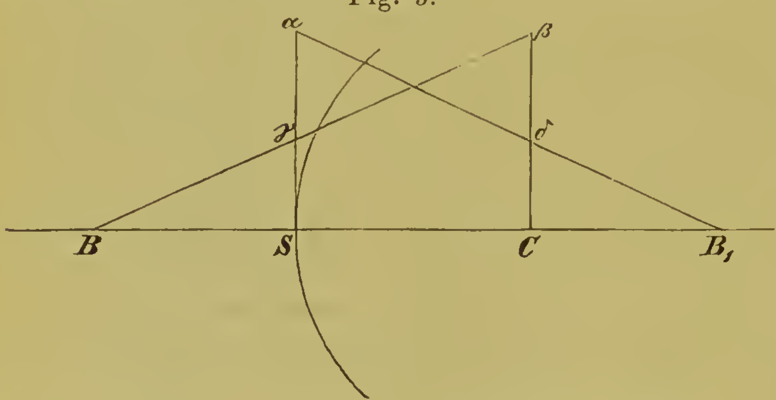
$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{b}{x} + \frac{b_1}{x_1} = 1;$$

---

*) Die für b und b_1 angegebenen Formeln führen zu einer einfachen Construction der beiden Brennpuncte, vorausgesetzt, dass a, m, m_1 gegeben sind. Diese Construction ist folgende:

Man errichte (Fig. 3) auf der Achse zwei Perpendikel, das eine im Scheitelpunct S, das andere im Centrum C. Auf diesen Perpendikeln

Fig. 3.



trage man die Längen m und m_1 auf; man mache nämlich

$$S\alpha = C\beta = m,$$

und

$$S\gamma = C\delta = m_1.$$

Zieht man alsdann die beiden Linien $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$, und verlängert diese Linien so weit, bis sie die Achse schneiden, so sind die so erhaltenen Schnittpunkte B und B_1 nichts Anderes als die beiden **Brennpuncte** der brechenden Fläche.

hier sind nämlich x und x_1 die Entfernungen der eben genannten Puncte vom Scheitelpunct.

Wir wollen nun ferner diejenige Beziehung untersuchen, welche zwischen den Puncten Y und Y_1 stattfindet. Aus den rechtwinkligen Dreiecken XSY und X_1SY_1 folgt sofort:

$$SY = SX \,.\, \operatorname{tg} \varphi,$$
$$SY_1 = SX_1 \,.\, \operatorname{tg} \varphi_1,$$

also, wenn wir die Entfernungen SY, SY_1 mit y, y_1 bezeichnen:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi,$$
$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$

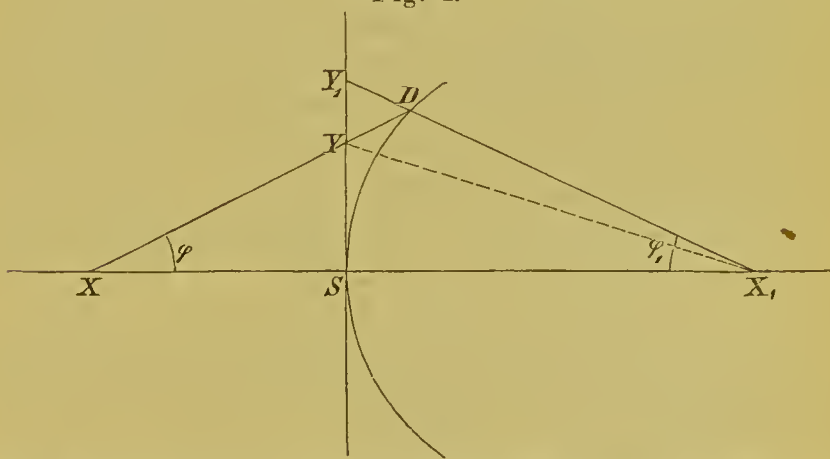
oder, weil wir (gemäss unseren Voraussetzungen) φ und φ_1 an Stelle von $\operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{tg} \varphi_1$ zu setzen berechtigt sind:

$$y = x\,\varphi,$$
$$y_1 = x_1\,\varphi_1;$$

also mit Rückblick auf (6):

$$y = a\,\omega,$$
$$y_1 = a\,\omega.$$

Fig. 4.



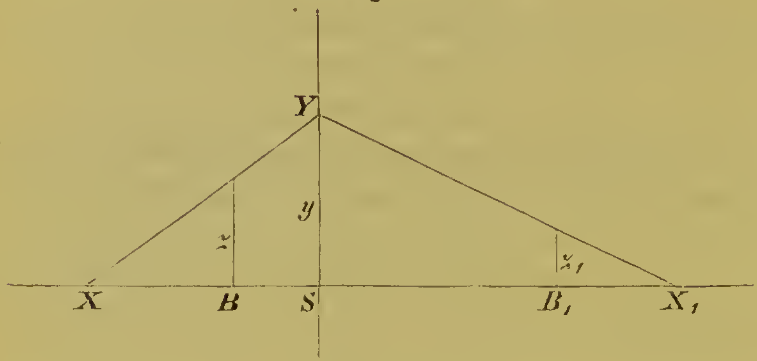
Somit ergiebt sich zwischen den beiden Puncten Y und Y_1 die einfache Beziehung:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y = y_1.$$

Die Kleinheit der Winkel φ, φ_1, ω und das hierauf basirende Näherungsverfahren bringen es also mit sich, dass die beiden Puncte Y und Y_1 als zwei mit einander zusammenfallende Puncte angesehen werden können. Sind aber Y und Y_1 als unter einander identisch zu betrachten, so gilt Gleiches (Fig. 4) auch von den Linien YX_1 und Y_1X_1.

Als Richtung des gebrochenen Strahles können wir also die Linie Y_1X_1, mit gleichem Recht aber auch die Linie YX_1 betrachten. Wir wählen der grösseren Bequemlichkeit willen die letztere Vorstellung, und werden demnach in Zukunft XY als den einfallenden und YX_1 als den gebrochenen Strahl ansehen (Fig. 5).

Fig. 5.



Es seien B und B_1 (Fig. 5) die früher (11) besprochenen Brennpuncte, also $SB = b$, $SB_1 = b_1$. Wir betrachten den Lichtstrahl XYX_1, und errichten in den festen Punkten B, S, B_1 drei auf der Achse senkrechte Linien z, y, z_1, welche hinaufreichen bis zu dem eben genannten Lichtstrahl. Zufolge (12) ist:

$$\frac{b}{x} + \frac{b_1}{x_1} = 1.$$

Zu dieser Gleichung fügen wir hinzu die (sich von selber verstehende) Gleichung $1 + 1 = 2$, oder:

$$\frac{x}{x} + \frac{x_1}{x_1} = 2,$$

und erhalten sodann durch Subtraction dieser beiden Gleichungen folgende Formel:

$$\frac{x - b}{x} + \frac{x_1 - b_1}{x_1} = 1,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{XB}{XS} + \frac{X_1B_1}{X_1S} = 1.$$

Mit Hülfe ähnlicher Dreiecke ergiebt sich aber (Fig. 5):

$$XB : XS = z : y, \qquad X_1B_1 : X_1S = z_1 : y,$$

d. i.

$$\frac{XB}{XS} = \frac{z}{y}, \qquad \frac{X_1B_1}{X_1S} = \frac{z_1}{y}.$$

Und hierdurch verwandelt sich die Formel (14) in folgende:

$$\frac{z}{y} + \frac{z_1}{y} = 1,$$

d. i. in:

(15) . . . . $z + z_1 = y.$

Somit ergiebt sich folgender Satz (Fig. 5):

(16) . . *Bezeichnet man bei irgend einem Lichtstrahl die in den Brennpuncten errichteten Ordinaten mit z, z_1, und die im Scheitelpunct errichtete Ordinate mit y, so wird jederzeit $z + z_1 = y$ sein. Sollte der betrachtete Lichtstrahl zufälliger Weise gerade durch den Scheitelpunct gehen, sollte mithin $y = 0$ sein, so wird $z + z_1$ ebenfalls $= 0$ sein. D. h. die Ordinaten z und z_1 werden in diesem Fall von gleicher Länge, aber entgegengesetzter Lage sein: die eine wird also oberhalb, die andere unterhalb der Achse liegen.*

Dieser Satz setzt uns in den Stand, für jeden einfallenden Strahl den zugehörigen gebrochenen Strahl zu construiren. Ist nämlich (Fig. 5) der Strahl XY gegeben, und sind mithin die Perpendikel z und y ebenfalls gegeben, so wird man im Brennpunct B_1 ein Perpendikel von der Länge $y - z$ errichten, und sodann den Endpunct dieses Perpendikels durch eine gerade Linie verbinden mit dem Puncte Y. Die so erhaltene Linie repräsentirt alsdann den gebrochenen Strahl YX_1.

§ 3. Weitere Untersuchung über eine einzige brechende Fläche. Die conjugirten Puncte und die conjugirten Ebenen.

Es seien (Fig. 6) B und B_1 die beiden Brennpuncte der brechenden Fläche, und S ihr Scheitelpunct. Ferner sei L ein leuchtender Punct; und endlich mögen $L\alpha L_1$, $L\beta L_1$, $L\gamma\lambda$ drei von diesem Punct ausgehende Strahlen sein, die wir den Puncten α, β, γ entsprechend kurzweg mit (α), (β), (γ) bezeichnen. Demgemäss wird L_1 zu bezeichnen sein als der Wiedervereinigungspunkt der Strahlen (α) und (β), hingegen λ als der Wiedervereinigungspunkt von (α) und (γ). Wir werden nachweisen, dass diese beiden Puncte L_1 und λ mit einander zusammenfallen.

Zunächst betrachten wir nur zwei Strahlen, nämlich (α) und (β). Bezeichnen wir die in B, B_1, S auf der Achse errichteten und bis zum Strahle (α) emporreichenden Perpendikel mit z, z_1, y, so ist zufolge des vorhergehenden Satzes:

$$z + z_1 = y.$$

Bezeichnen wir andererseits die in denselben Puncten errichteten, jedoch bis zum Strahl (β) emporragenden Perpendikel mit Z, Z_1, Y, so ist ebenfalls zufolge jenes Satzes:

$$Z + Z_1 = Y.$$

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen folgt:

$$(Z - z) + (Z_1 - z_1) = (Y - y),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(1) \quad \frac{Z - z}{Y - y} + \frac{Z_1 - z_1}{Y - y} = 1.$$

Die hier auftretenden Differenzen $Z - z$, $Z_1 - z_1$, $Y - y$ repräsentiren diejenigen Stücke der zuvor genannten Perpendikel, welche zwischen den beiden Strahlen (α) und (β) liegen. Beachtet man dies, so ergeben sich durch Betrachtung der beiden Dreiecke $L\alpha\beta$ und $L_1\alpha\beta$ augenblicklich folgende Proportionen:

$$(Z - z) : (Y - y) = UB : US,$$
$$(Z_1 - z_1) : (Y - y) = U_1B_1 : U_1S,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{Z - z}{Y - y} = \frac{UB}{US}, \qquad \frac{Z_1 - z_1}{Y - y} = \frac{U_1B_1}{U_1S}.$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (1) in:

$$\frac{UB}{US} + \frac{U_1B_1}{U_1S} = 1.$$

Zu dieser Gleichung fügen wir die (sich von selber verstehende) Gleichung:

$$\frac{US}{US} + \frac{U_1S}{U_1S} = 2$$

hinzu, und erhalten alsdann durch Subtraction beider Gleichungen die Formel:

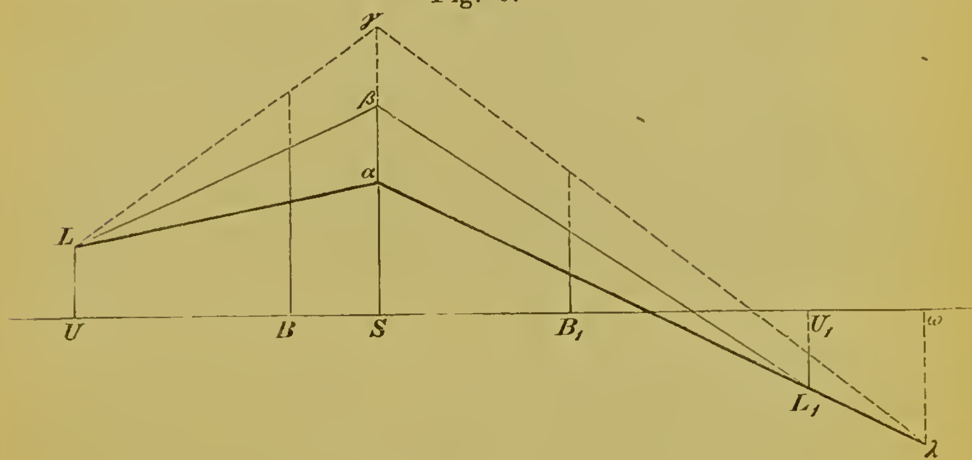
$$\frac{BS}{US} + \frac{B_1S}{U_1S} = 1,$$

also, wenn wir die Brennweiten wiederum mit b und b_1 bezeichnen:

$$(2) \quad \frac{b}{US} + \frac{b_1}{U_1S} = 1.$$

Führen wir nun genau dieselbe Untersuchung zum zweiten Male durch, nur mit dem Unterschiede, dass wir jetzt nicht die Strahlen (α) und (β), sondern die Strahlen (α) und (γ) unserer Betrachtung unterwerfen, so werden wir, wie leicht zu übersehen ist (Fig. 6), zu folgender mit (2) analogen Formel gelangen:

Fig. 6.



$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{b}{US} + \frac{b_1}{\omega S} = 1.$$

Aus diesen beiden Formeln (2) und (3) ergiebt sich aber unmittelbar:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U_1 S = \omega S.$$

Hieraus folgt, dass der Punkt ω zusammenfällt mit dem Punct U_1, dass mithin (Fig. 6) der Punct λ zusammenfallen wird mit dem Punct L_1. Die drei Strahlen (α), (β), (γ) werden sich also nach erlittener Brechung alle in ein und demselben Punct wieder vereinigen. Wir übersehen sofort, dass dieses Resultat unmittelbar ausgedehnt werden kann auf den Fall, dass von dem leuchtenden Punct L nicht drei, sondern beliebig viele Strahlen ausgehen, und gelangen daher zu folgendem Satz:*)

---

*) Etwas kürzer kann man zu diesem Satz in folgender Art gelangen:

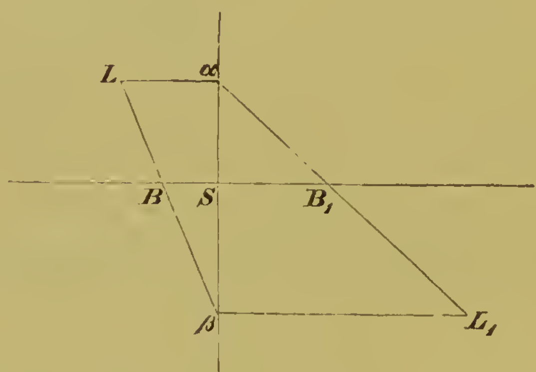
Es sei L der gegebene leuchtende Punct, und C das Centrum der brechenden Fläche. Man betrachte für den Augenblick die Linie LC als die Achse der Fläche. Sämmtliche von L ausgehende Strahlen werden sich dann (vergl. Seite 7) nach erlittener Brechung in einem einzigen Puncte vereinigen, und zwar in einem Punct L_1, der auf der Achse, d. i. auf der Linie LC (oder ihrer Verlängerung) liegt.

Hieraus folgt, dass der in Rede stehende Satz nicht nur für die-

(5) . . . *Strahlen, die von irgend einem leuchtenden Punct ausgehen, und auf die brechende Fläche fallen, werden sich nach erlittener Brechung sämmtlich in ein und demselben Punct durchkreuzen. Zwei solche Puncte, der leuchtende Punct, von dem die Strahlen ausgehen, und derjenige Punct, in welchem sie nach erlittener Brechung sich durchkreuzen, mögen conjugirte Puncte genannt werden. Genauer ausgedrückt: Sie mögen Puncte genannt werden, die einander conjugirt sind in Bezug auf die hier betrachteten Körper M und M_1.*

Es sei L (Fig. 7) ein beliebig gegebener leuchtender Punct. Unter den Strahlen, welche L aussendet, wollen wir denjenigen

Fig. 7.



verfolgen, welcher parallel mit der Achse fortschreitet, nämlich den Strahl $L\alpha$. Der Weg, welchen dieser Strahl nach erlittener Brechung einschlägt, muss durch den Brennpunct B_1 hindurchgehen, muss also dargestellt sein durch die Linie αB_1. Dass diese Behauptung richtig ist, können wir uns in doppelter Weise deutlich machen:

Entweder dadurch, dass wir uns erinnern an die für die Brennpuncte gegebene Definition (Seite 7). Jener Definition zufolge gehen nämlich alle mit der Achse parallelen Strahlen nach erlittener Brechung durch einen der beiden Brennpuncte hindurch.

---

jenigen Strahlen gilt, deren Bahnen in einer durch L und die beiden Brennpuncte B, B_1 gelegten Ebene sich befinden, sondern dass er gültig ist für sämmtliche von L ausgehende Strahlen — ganz gleichgültig, ob ihre Bahnen in der genannten Ebene liegen, oder ob sie unter irgend welchen Winkeln gegen diese Ebene geneigt sind.

Oder dadurch, dass wir den über die Ordinaten eines Strahles gefundenen Satz (Seite 11) in Anwendung bringen. Diesem Satz zufolge sind die in B und B_1 errichteten, bis zum Strahl emporragenden Perpendikel zusammengenommen immer ebenso gross als das in S errichtete und ebenfalls bis zum Strahl emporreichende Perpendikel. In unserm Fall sind die in B und S errichteten Perpendikel beide gleich gross. Demnach muss das Perpendikel in B_1 gleich Null sein. D. h. der Strahl muss durch B_1 grade hindurchgehen.

Mit gleicher Leichtigkeit kann unter den von L ausgehenden Strahlen derjenige verfolgt werden, welcher durch den Brennpunct B geht, also der Strahl $LB\beta$ (Fig. 7), und nachgewiesen werden, dass dieser Strahl nach erlittener Brechung parallel fortschreiten muss mit der Achse.

Wir bezeichnen (Fig. 7) denjenigen Punct, in welchem sich die beiden hier betrachteten Strahlen nach erlittener Brechung durchkreuzen, mit L_1. Durch diesen Punct werden dann sämmtliche Strahlen hindurchgehen, die von dem leuchtenden Punct L ausgesendet werden; wie sich solches aus dem vorhergehenden Satz augenblicklich ergiebt. Demnach wird L_1 der mit L conjugirte Punct sein. Wir gelangen somit zu folgendem einfachen Resultat:

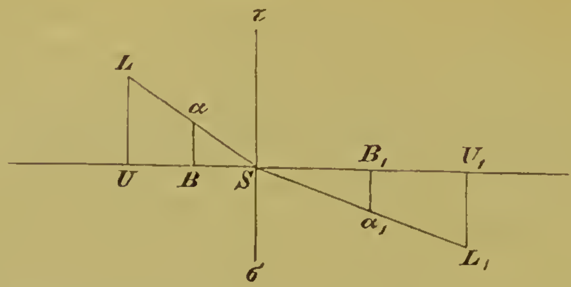
(6) . . . *Construirt man (Fig. 7) ein mit der Achse paralleles und durch die beiden Brennpuncte B, B_1 hindurchgehendes Trapez, dessen eine Diagonale in der Scheitelebene liegt, so werden die Endpuncte der andern Diagonale jederzeit conjugirte Puncte sein.*

Es seien (Fig. 8) L und L_1 irgend zwei conjugirte Puncte. Die Abstände dieser Puncte von der Scheitelebene $\sigma\tau$ sind dargestellt durch die Linien US und U_1S. Andererseits sind ihre Abstände von der Achse dargestellt durch die beiden Linien UL und U_1L_1. Zwischen den zuerst genannten Abständen findet, wie wir früher (2) gefunden haben, die Relation statt:

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{b}{US} + \frac{b_1}{U_1S} = 1.$$

Wir wollen nun zweitens untersuchen, in welcher Beziehung die beiden andern Abstände UL und U_1L_1 zu einander stehen. Zu diesem Zweck ziehen wir (Fig. 8) den Strahl LS. Dieser muss nach erlittener Brechung durch den conjugirten Punct L_1 hin-

Fig. 8.



durchgehen. Demnach wird die Linie SL_1 diejenige Richtung repräsentiren, in welcher dieser Strahl nach erlittener Brechung sich fortbewegt. Folglich wird der ganze Weg des Strahles dargestellt sein durch LSL_1. Auf diesen Strahl bringen wir den früher (Seite 11) gefundenen Satz in Anwendung. Jenem Satz zufolge müssen die in den Brennpuncten B und B_1 errichteten und bis zum Strahl emporreichenden Perpendikel zusammengenommen ebenso gross sein, als ein im Scheitelpunct errichtetes und ebenfalls bis zum Strahl emporragendes Perpendikel. Für unsern Strahl LSL_1 ist das letztgenannte Perpendikel aber $= 0$, die beiden erstgenannten Perpendikel müssen daher zusammengenommen ebenfalls $= 0$ sein; d. h. sie müssen von gleicher Länge und entgegengesetzter Lage sein. Somit ergiebt sich (Fig. 8):

(7a) . . . . $B\alpha = B_1\alpha_1$.

Nun ergiebt sich aus dem Dreieck LUS:

$$\frac{B\alpha}{UL} = \frac{BS}{US} = \frac{b}{US};$$

und andererseits aus dem Dreieck L_1U_1S:

$$\frac{B_1\alpha_1}{U_1L_1} = \frac{B_1S}{U_1S} = \frac{b_1}{U_1S}.$$

Substituirt man die Werthe, welche sich aus diesen beiden Relationen für $B\alpha$ und $B_1\alpha_1$ ergeben, in die Formel (7a), so erhält man:

(8) . . . . $b\,\frac{UL}{US} = b_1\,\frac{U_1L_1}{U_1S}$.

Und hiermit haben wir diejenige Relation hingestellt, um welche es sich handelte, nämlich diejenige, welche stattfindet zwischen den Abständen UL und $U_1 L_1$. Also:

(9) . . . *Versteht man unter L, L_1 irgend zwei conjugirte Puncte, versteht man ferner (Fig. 8) unter LU, $L_1 U_1$ die Abstände dieser Puncte von der Achse, und unter US, $U_1 S$ ihre Abstände von der Scheitelebene, so finden folgende Formeln statt:*

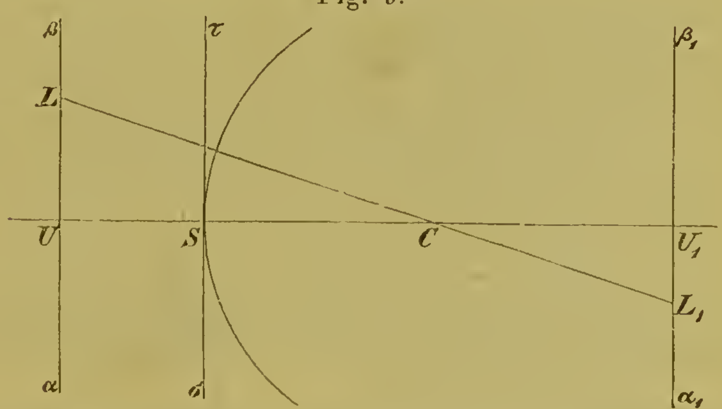
$$\frac{b}{US} + \frac{b_1}{U_1 S} = 1, \qquad b\,\frac{UL}{US} = b_1\,\frac{U_1 L_1}{U_1 S}.$$

Hier bezeichnen b, b_1 nach wie vor die beiden Brennweiten der brechenden Fläche.

Ist die Lage irgend eines Punctes L gegeben, so werden diese Formeln dienen können, um die Lage des conjugirten Punctes L_1 zu ermitteln. Ist nämlich L gegeben, so werden seine Abstände LU und US ebenfalls gegeben sein. Die beiden vorstehenden Formeln werden demnach in diesem Fall benutzt werden können, um die zugehörigen Werthe von $L_1 U_1$ und $U_1 S$ zu berechnen. Mit andern Worten: Sie werden benutzt werden können, um die Lage des Punctes L_1 zu finden.

Es mögen beliebig viele, etwa 1000 Puncte L gegeben sein, welche sämmtlich auf ein und derselben Ebene liegen, und zwar auf einer Ebene, die senkrecht zur Achse steht. Diese Ebene mag (Fig. 9) bezeichnet werden mit $\alpha\beta$. Ermittelt sollen werden die 1000 conjugirten Puncte L_1.

Fig. 9.



Zufolge (9) findet für zwei conjugirte Puncte die Formel statt:

(10) . . . . $\frac{b}{US} + \frac{b_1}{U_1 S} = 1.$

Im vorliegenden Fall sind 1000 Puncte L vorhanden, welche sämmtlich ein und dasselbe US besitzen. Durch Anwendung der vorstehenden Formel wird sich daher bei all diesen Puncten auch für $U_1 S$ ein und derselbe Werth ergeben. D. h. die 1000 conjugirten Puncte L_1 werden von der Scheitelebene $\sigma\tau$ sämmtlich gleich weit entfernt sein. Es werden demnach diese Puncte auf einer Ebene liegen, die (ebenso, wie die Ebene der Puncte L) senkrecht zur Achse steht. Also:

(11) . . *Sind irgend welche Puncte gegeben, die in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen, so werden sich die conjugirten Puncte ebenfalls in einer solchen Ebene befinden. Zwei Ebenen dieser Art mögen in Zukunft conjugirte Ebenen heissen.*

Zwischen den Abständen US und $U_1 S$, welche zwei solche Ebenen (Fig. 9) vom Scheitelpunct besitzen, findet die einfache Beziehung statt:

$$\frac{b}{US} + \frac{b_1}{U_1 S} = 1,$$

wo b und b_1 wiederum die Brennweiten der brechenden Fläche vorstellen.

Es seien (Fig. 9) $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ irgend zwei conjugirte Ebenen. Gegeben sei ausserdem ein auf der Ebene $\alpha\beta$ befindlicher Punct L. Es handele sich um die Bestimmung des conjugirten Punctes L_1.

Zufolge des vorhergehenden Satzes muss sich der gesuchte Punct L_1 befinden auf der Ebene $\alpha_1\beta_1$. Um nun aber seine Lage auf dieser Ebene näher bestimmen zu können, müssen wir uns erinnern an die für conjugirte Puncte gegebene Definition. (Seite 14). Jener Definition zufolge werden alle von L ausgehenden Lichtstrahlen nach erlittener Brechung hindurchgehen durch L_1. Lassen wir also von dem gegebenen Punct L irgend welchen Lichtstrahl ausgehen, und verfolgen wir den Weg dieses Lichtstrahles durch die brechende Fläche hindurch, so wird der gesuchte Punct L_1 derjenige sein, in welchem die Ebene $\alpha_1\beta_1$ von diesem Lichtstrahl getroffen wird.

Wie wir sehen, handelt es sich also nur darum, irgend einen von L ausgehenden Strahl (gleichgültig welchen) auf seinem Wege durch die brechende Fläche hindurch genau zu verfolgen. Hierzu eignet sich am besten derjenige Strahl, welcher gegen das Centrum der brechenden Fläche gerichtet ist, welcher also von L ausgeht in der Richtung LC (Fig. 9). Dieser Strahl fällt nämlich senkrecht auf die brechende Fläche und erleidet daher beim Durchgange durch die Fläche keinerlei Ablenkung. Der Weg dieses Strahles wird demnach dargestellt sein durch eine von L nach C gezogene, und über C hinaus verlängerte gerade Linie. Somit wird der gesuchte Punct L_1 derjenige sein, in welchem die Ebene $\alpha_1 \beta_1$ von der eben genannten geraden Linie getroffen wird.

Denken wir uns in der Ebene $\alpha\beta$ beliebig viele, etwa 100 Puncte L gegeben, und lassen wir von jedem dieser Puncte eine Linie auslaufen, welche durch C geht, so erhalten wir 100 Linien, von welchen die Ebene $\alpha_1 \beta_1$ in ebenso vielen Puncten getroffen wird. Und diese 100 Puncte werden also dann diejenigen Puncte L_1 repräsentiren, welche conjugirt sind mit den gegebenen Puncten L. Die 100 Puncte L und die 100 conjugirten Puncte L_1 sind demnach zu einander perspectivisch in Bezug auf das Centrum C. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

(12) . . *Ist in irgend welcher zur Achse senkrechten Ebene ein beliebiges Punctsystem gegeben, so befindet sich das conjugirte Punctsystem ebenfalls in einer zur Achse senkrechten Ebene. Ausserdem werden alsdann beide Punctsysteme perspectivisch zu einander sein in Bezug auf das Centrum der brechenden Fläche.*

Wenn wir uns, wie es später geboten sein wird, genauer ausdrücken müssen, so werden zwei Punctsysteme der eben besprochenen Art als Systeme zu bezeichnen sein, die zu einander conjugirt sind in Bezug auf die gegenwärtig betrachteten Körper M und M_1. Derselbe Zusatz wird alsdann natürlich auch zu machen sein bei einzelnen Puncten, die einander conjugirt sind.

§ 4. Der Durchgang des Lichtes durch beliebig viele brechende Flächen. Die Brenn- und Hauptpuncte.

Wir gehen nach diesen speciellen Untersuchungen über eine einzige brechende Fläche nun über zu dem früher besprochenen allgemeinen Problem (Seite 1). Die auf einander folgenden durchsichtigen Körper, aus welchen der zu betrachtende Cylinder zusammengesetzt ist, mögen (ebenso wie damals) mit $M_1, M_2, M_3, \ldots M'$ bezeichnet werden. Desgleichen mögen unter $s, s_1, s_2, \ldots s'$ diejenigen Linien verstanden werden, durch welche der Weg eines den Cylinder durchschreitenden Strahles in jenen Körpern der Reihe nach dargestellt ist. Wir denken uns beliebig viele, etwa 100 solche Strahlen, so dass wir also 100 Linien s, 100 Linien s_1, 100 Linien s_2, u. s. w., endlich 100 Linien s' vor uns haben.

Wir wollen annehmen, die 100 Linien s gingen sämmtlich aus von ein und demselben Punct L. Durch Anwendung eines früher (Seite 4) gefundenen Satzes folgt dann unmittelbar, dass die 100 Linien s_1 sich in einem einzigen Punct durchkreuzen werden, dass sie sich nämlich durchkreuzen werden in demjenigen Punct L_1, welcher dem gegebenen Punct L conjugirt ist in Bezug auf die Körper M und M_1.

Die 100 Linien s_1 können demnach als Linien angesehen werden, welche sämmtlich von L_1 ausgehen. Daraus folgt durch abermalige Anwendung des vorhin genannten Satzes sofort, dass die 100 Linien s_2 sich wiederum in einem einzigen Punct durchkreuzen, und zwar in demjenigen Punct L_2, welcher zu L_1 conjugirt ist in Bezug auf die Körper M_1 und M_2.

Analoges wird, wie nun leicht zu übersehen ist, gelten von den 100 Linien s_3, u. s. w. Analoges wird also schliesslich auch gelten von den im letzten Körper M' vorhandenen 100 Linien s'. Nennen wir die beiden Linien s und s', durch welche der Weg ein und desselben Strahles im ersten und im letzten Körper dargestellt wird, kurzweg den eintretenden und den austretenden Strahl, so haben wir also folgenden Satz:

1) . . . *Durchkreuzen sich die eintretenden Strahlen sämmtlich (entweder unmittelbar, oder bei gehöriger Verlängerung) in einem einzigen Punct, so gilt Gleiches auch von den austretenden Strahlen.*

Zwei solche Puncte, der Kreuzungspunct der eintretenden Strahlen und der Kreuzungspunct der austretenden Strahlen sollen in Zukunft conjugirte Puncte genannt werden, oder genauer ausgedrückt, Puncte genannt werden, die einander conjugirt sind in Bezug auf die Körper M und M'.

Sind demnach s und σ zwei beliebig gegebene eintretende Strahlen, und sind ferner s' und σ' die zugehörigen *austretenden Strahlen, so wird der Schnittpunct von s und σ conjugirt sein zu dem Schnittpunct von s′ und σ′.*

Sind L und L' irgend zwei conjugirte Puncte, so wird jeder durch L hindurchgehende eintretende Strahl einen austretenden Strahl hervorrufen, welcher durch L' geht. Gleiches wird mit Bezug auf A und A' gelten, falls wir unter A und A' ebenfalls zwei einander conjugirte Puncte verstehen. Denken wir uns demnach einen eintretenden Strahl, welcher gleichzeitig durch L und A geht, so wird durch diesen ein austretender Strahl hervorgerufen, welcher gleichzeitig durch L' und A' geht. Also:

(2) . . . *Sind L, L' zwei conjugirte Puncte, und sind A, A' ebenfalls zwei conjugirte Puncte, so wird der durch L und A gehende eintretende Strahl einen austretenden Strahl hervorrufen, welcher durch L' und A' geht.*

Von Neuem wollen wir uns beliebig viele eintretende Strahlen s denken, und die zugehörigen austretenden Strahlen mit s' bezeichnen. Sind die Strahlen s sämmtlich parallel zur Achse des Cylinders, so werden sie als Strahlen angesehen werden können, die sich sämmtlich in einem einzigen, unendlich fernen Punct durchkreuzen. Zufolge des Satzes (1) werden sich daher in diesem Fall die austretenden Strahlen s' ebenfalls in einem einzigen Punct durchkreuzen. Dieser Punct mag mit F' bezeichnet werden. Denken wir uns umgekehrt die Strahlen s' als parallel mit der Achse, so wird sich ein gemeinschaftlicher Kreuzungspunct für die Strahlen s ergeben. Dieser letztere mag F heissen. Wir nennen die Puncte F und F' die Brennpuncte des von uns betrachteten Cylinders. Also:

(3) . . . *Unter dem Brennpunct F soll derjenige Punct verstanden werden, in welchem die eintretenden Strahlen sich kreuzen müssen, falls die austretenden parallel zur Achse sein sollen; und andrerseits unter dem Brennpunkt F' derjenige, in welchem die austretenden Strahlen sich kreuzen werden, falls die eintretenden parallel zur Achse sind.*

Diese beiden Puncte F und F' liegen offenbar in der Achse.

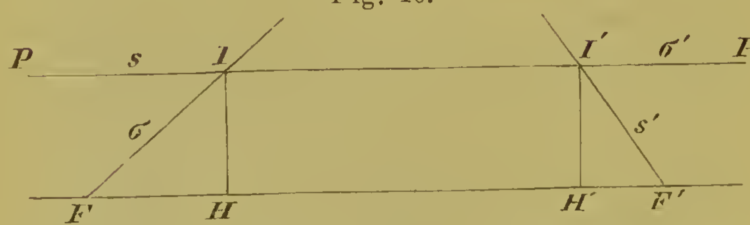
Wir wollen uns ein Punctsystem (L) denken, welches aus beliebig vielen und beliebig gelegenen Puncten besteht. Das mit (L) in Bezug auf die Körper M, M_1 conjugirte System mag (L_1) heissen. Sodann mag das mit (L_1) in Bezug auf die Körper M_1, M_2 conjugirte System (L_2) genannt werden, u. s. w. Endlich mag das letzte System, zu welchem wir auf diese Weise gelangen, bezeichnet werden mit (L').

Wir nehmen an, dass das ursprünglich gegebene System (L) sich in einer zur Achse senkrechten Ebene befindet. Gleiches wird alsdann, zufolge eines früher (Seite 19) gefundenen Satzes, auch von allen übrigen Systemen gelten. Und ausserdem wird, zufolge jenes Satzes (L) mit (L_1) perspectivisch sein in Bezug auf das Centrum der ersten brechenden Fläche; ferner (L_1) mit (L_2) perspectivisch in Bezug auf das Centrum der zweiten brechenden Fläche; u. s. w. Daraus folgt, dass das erste und letzte System, nämlich (L) und (L') ebenfalls unter einander perspectivisch sein werden, und zwar perspectivisch in Bezug auf einen Punct, der in der Achse liegt, dessen Lage sich im Uebrigen aber nicht näher bezeichnen lässt. Also:

(4) . . . *Befindet sich von zwei Punctsystemen* (L) *und* (L'), *die in Bezug auf die Körper M und M' zu einander conjugirt sind, das eine in irgend welcher zur Achse senkrechten Ebene, so gilt Gleiches auch von dem andern. Ausserdem werden in diesem Falle beide Systeme zu einander perspectivisch sein in Bezug auf irgend welchen in der Achse befindlichen Punct, dessen Lage im Allgemeinen nicht näher bezeichnet werden kann.*

Es sei PP (Fig. 10) eine beliebige Linie, die parallel ist zur Achse. Wir betrachten diese Linie (oder ein Stück derselben)

Fig. 10.



als einen eintretenden Strahl s. Der zugehörige austretende Strahl s' mag dargestellt sein durch die Linie $J'F'$. Jeder parallel mit der Achse eintretende Strahl ruft, wie wir wissen (Seite 21) einen austretenden Strahl hervor, der durch einen der beiden Brennpuncte geht. Dieser Satz lässt sich auf die eben genannten Strahlen s und s' unmittelbar anwenden. Ihm zufolge wird der Punct F', in welchem die Achse vom Strahl s' geschnitten wird, der eine Brennpunct sein.

Wir betrachten andererseits die Linie PP (oder ein Stück derselben) als einen austretenden Strahl σ'. Der zugehörige eintretende Strahl σ mag dargestellt sein durch die Linie FJ. In ähnlicher Weise wie vorhin folgt alsdann, dass der Punct F, in welchem die Achse von Strahl σ geschnitten wird, der andere Brennpunct sein muss.

Wir gehen in der hier begonnenen Betrachtung weiter vorwärts. Da unter s und σ zwei eintretende, andererseits unter s' und σ' die zugehörigen austretenden Strahlen verstanden wurden, so wird (Seite 20) der Schnittpunct von s und σ conjugirt sein zu dem Schnittpunct von s' und σ'. Es wird also (Fig. 10) der Punct J conjugirt sein zum Puncte J'.

Wir legen durch die Puncte J und J' zwei zur Achse senkrechte Ebenen JH und $J'H'$. In der Ebene JH mögen ausser dem Puncte J noch irgend welche anderen Puncte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ angenommen werden. Zufolge des vorhergehenden Satzes werden dann die zu $J, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ conjugirten Puncte ebenfalls in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen. Und diese Ebene kann, weil der zu J conjugirte Punct J' in der Ebene $J'H'$ liegt, keine andere sein als die Ebene $J'H'$ selber.

Befinden sich also die Puncte $J, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ wie wir voraussetzten, in der Ebene JH, so liegen die conjugirten Puncte $J', \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ sämmtlich in der Ebene $J'H'$. Ausserdem werden, wie sich gleichfalls aus dem vorhergehenden Satz ergiebt, diese Punctsysteme $J, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und $J', \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ zu einander perspectivisch sein in Bezug auf irgend einen noch unbekannten in der Achse liegenden Punct. Mit andern Worten: Die Verbindungslinien $JJ', \alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \ldots$ werden sich sämmtlich in einem einzigen Punct schneiden, und zwar in einem Punct, der auf der Achse liegt. Nun ist aber die Linie JJ' parallel zur Achse. Daraus folgt, dass der eben genannte Schnittpunct auf der Achse in unendlicher Ferne liegt, dass also jene Verbindungslinien $JJ', \alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \ldots$ sämmtlich parallel zur Achse sind. Ist demnach in der Ebene JH ein beliebiger Punct α gegeben, so ist in Betreff des conjugirten Punctes α' zweierlei zu bemerken; erstens, dass derselbe in der Ebene $J'H'$ liegt, und zweitens, dass die Verbindungslinie $\alpha\alpha'$ parallel zur Achse ist. Wir kommen somit zu folgendem Resultat:

(5) . . . *Es existiren zwei zur Achse senkrechte Ebenen, welche von jedweder mit der Achse parallel gezogenen Linie in zwei einander conjugirten Puncten geschnitten werden. Diese beiden Ebenen sollen in Zukunft die Hauptebenen genannt werden. Zugleich mögen diejenigen Puncte dieser Ebenen, welche in der Achse liegen, die Hauptpuncte heissen. Sind H, H' die Hauptpuncte und F, F' die Brennpuncte, so mögen die Entfernungen*

$$FH = f, \quad F'H' = f'$$

die beiden Brennweiten genannt werden.

In Betreff der Art und Weise, wie wir hier zu den Brenn- und Hauptpuncten gelangt sind, dürfte Folgendes hervorzuheben sein. Ist s irgend ein parallel zur Achse eintretender, und s' der zugehörige austretende Strahl, so wird s' die Achse in dem Brennpunct F' durchschneiden. Fällt man andererseits von dem Schnittpunct, den s und s' (bei gehöriger Verlängerung) geben, ein Perpendikel auf die Achse, so wird der Fusspunct dieses Perpendikels der Hauptpunct H' sein. Aehnliches würde zu bemerken sein in Betreff der Puncte F und H.

Wie man die in Rede stehenden Puncte F, F', H, H' in jedem gegebenen Fall experimentell zu ermitteln im Stande ist, werden wir später zeigen. Vorläufig wollen wir diese Puncte als bereits bekannt voraussetzen, und zeigen, wie sich die gegenseitige Beziehung zwischen irgend zwei conjugirten Puncten und ebenso auch die gegenseitige Beziehung zwischen dem ein- und austretenden Strahl bei Zugrundelegung jener vier Puncte in überraschend einfacher Weise darstellen lässt.

§ 5. Ueber die Beziehung zwischen zwei conjugirten Puncten. Beiläufige Erwähnung der Knotenpuncte.

Der erste und letzte Körper in dem von uns betrachteten Cylinder waren bezeichnet worden mit M und M'. Wir wollen uns die Achse des Cylinders nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert denken. Von den beiden unendlich fernen Puncten, zu denen wir hierdurch gelangen, mag derjenige, welcher mit M

auf derselben Seite liegt, durch Ω, andererseits derjenige, welcher mit M' auf gleicher Seite liegt, durch Ω' bezeichnet werden.

Denken wir uns beliebig viele eintretende Strahlen, die sämmtlich parallel zur Achse sind, so durchkreuzen sich die conjugirten austretenden Strahlen im Brennpuncte F' (Seite 21). Eintretende Strahlen der eben genannten Art können aber als Strahlen angesehen werden, die sich (bei gehöriger Verlängerung) in dem unendlich fernen Punct Ω durchkreuzen. Ist also Ω der Durchkreuzungspunct für irgend welche eintretenden Strahlen, so wird, können wir sagen, F' der Durchkreuzungspunct für die zugehörigen austretenden Strahlen sein. Kürzer ausgedrückt: Die beiden Puncte Ω und F' sind **conjugirte** Puncte. Ebenso ergiebt sich andererseits, dass F und Ω' gleichfalls **conjugirte** Puncte sind.

Wir wollen uns die Brennpuncte F, F' und ebenso auch die Hauptpuncte H, H' gegeben denken. Sind (Fig. 11) ϑ und ϑ' zwei Puncte, in welchen die beiden Hauptebenen von irgend einer Linie geschnitten werden, die paralell läuft zur Achse, so sind ϑ und ϑ' zwei einander conjugirte Puncte, wie sich solches aus der Definition der Hauptebenen (Seite 24) unmittelbar ergiebt. Ausserdem sind, wie vorhin bemerkt wurde, Ω und F' ebenfalls conjugirte Puncte. Wir haben also zwei Paare conjugirter Puncte; nämlich

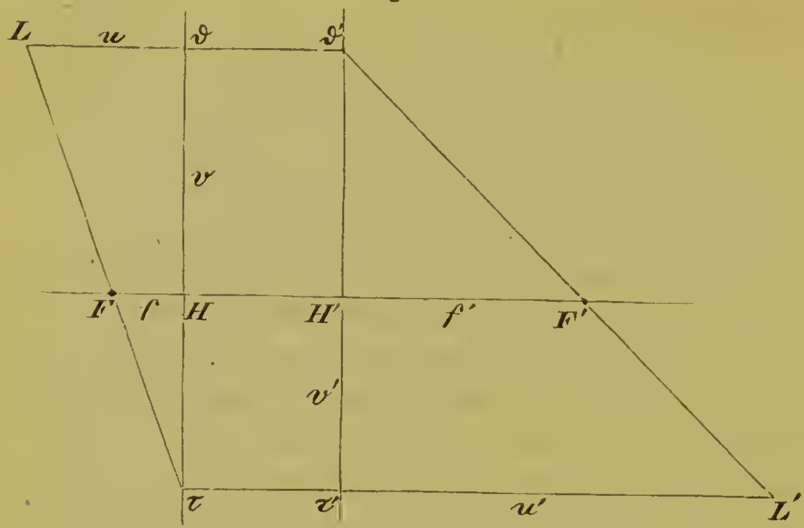
erstens: ϑ und ϑ',
zweitens: Ω und F'.

Denken wir uns daher einen **eintretenden Strahl**, welcher durch die beiden Puncte Ω, ϑ geht, so wird (Satz, Seite 21) der zugehörige **austretende Strahl** durch die Puncte ϑ', F' gehen. Mit andern Worten: Betrachten wir (Fig. 11) die Linie $\Omega\vartheta$ oder $\vartheta\vartheta'$ als einen eintretenden Strahl, so wird der zugehörige austretende Strahl dargestellt sein durch die Linie $\vartheta' F'$.

Construiren wir ferner auf den Hauptebenen irgend zwei einander conjugirte Puncte τ und τ', und beachten wir, dass F und Ω' gleichfalls conjugirte Puncte sind, so wird sich in ganz ähnlicher Weise ergeben, dass der eintretende Strahl $F\tau$ einen austretenden Strahl hervorrufen muss, welcher durch die Linie $\tau'\Omega'$ oder (was auf dasselbe hinauskommt) durch die Linie $\tau\tau'$ dargestellt ist.

Wir können somit die Linien $L\vartheta$, $L\tau$ als eintretende Strahlen, und die Linien $\vartheta' L'$, $\tau' L'$ als die zugehörigen austretenden

Fig. 11.



Strahlen ansehen. Hieraus folgt (Seite 20) unmittelbar, dass die Puncte L und L' conjugirte Puncte sind. Folglich:

(1) . . . *Sind die Brennpuncte F, F' und die Hauptpuncte H, H' bekannt, so kann für jeden beliebig gegebenen Punct L der conjugirte Punct L' erhalten werden mit Hülfe des in Fig.* 11 *angegebenen Trapezes.*

Diese einfache geometrische Beziehung zwischen L und L' lässt sich leicht in die Analysis übersetzen, und führt dann zu Formeln, welche nicht minder einfach sind.

Wir bezeichnen die Abstände, welche der Punct L (Fig. 11) von der einen Hauptebene und von der Achse hat, mit u und v, ferner die Abstände, welche L' von der andern Hauptebene und von der Achse hat, mit u' und v', und setzen endlich die Brennweiten

$$FH = f, \quad F'H' = f'.$$

Aus dem Dreieck $L\vartheta\tau$ folgt $HF : \vartheta L = \tau H : \tau\vartheta$, oder (was dasselbe ist) $f : u = v' : v + v'$, oder endlich:

(2) . . . . $\dfrac{f}{u} = \dfrac{v'}{v + v'}$.

In gleicher Weise ergiebt sich aus dem Dreieck $L'\vartheta'\tau'$:

(3) . . . . $\dfrac{f'}{u'} = \dfrac{v}{v + v'}$.

Aus diesen Relationen folgt durch Addition sofort:

(4) . . . . $\frac{f}{u} + \frac{f'}{u'} = 1.$

Multiplicirt man ferner die Relation (2) mit v, die Relation (3) mit v', so werden die rechten Seiten beider Relationen unter einander identisch. Gleiches muss daher alsdann auch gelten von ihren linken Seiten. Somit folgt:

(5) . . . . $f\frac{v}{u} = f'\frac{v'}{u'}.$

Die so erhaltenen Formeln (4), (5) drücken die Beziehung aus, welche zwischen den beiden Puncten L und L' stattfindet; sie setzen uns nämlich, falls die Coordinaten u, v des einen Punctes gegeben sind, in den Stand, die Coordinaten u', v' des andern Punctes zu finden.

Obwohl weitere Formeln also überflüssig sind, so wird es trotzdem zweckmässig sein, noch auf eine dritte Formel aufmerksam zu machen, die sich ebenfalls aus den Relationen (2), (3) ergiebt, und die ausgezeichnet ist durch ihre Einfachheit. Wir können die Relation (2) auch so schreiben:

$$\frac{u}{f} = \frac{v + v'}{v'},$$

oder, wenn wir auf beiden Seiten 1 abziehen, auch so:

$$\frac{u - f}{f} = \frac{v}{v'}.$$

In gleicher Weise lässt sich die Relation (3) in die Form versetzen:

$$\frac{u' - f'}{f'} = \frac{v'}{v}.$$

Multiplicirt man nun beide Relationen mit einander, so folgt:

$$\frac{u - f}{f} \cdot \frac{u' - f'}{f'} = 1,$$

oder, was dasselbe ist:

(6) . . . . $(u - f)\,(u' - f') = ff'.$

Wir kommen somit, wenn wir Alles zusammenfassen, zu folgendem Resultat:

(7) . . . *Sind f, f' die beiden Brennweiten, und L, L' zwei einander conjugirte Puncte, so finden zwischen den Abständen u, v des Punctes L und zwischen den Abständen u', v' des Punctes L' folgende Beziehungen statt:*

$$I. \begin{cases} \dfrac{u-f}{f} = \dfrac{v}{v'}, \\ \dfrac{u'-f'}{f'} = \dfrac{v'}{v}, \end{cases} \qquad II. \begin{cases} \dfrac{f}{u} + \dfrac{f'}{u'} = 1, \\ f\dfrac{v}{u} - f'\dfrac{v'}{u'} = 0, \end{cases}$$

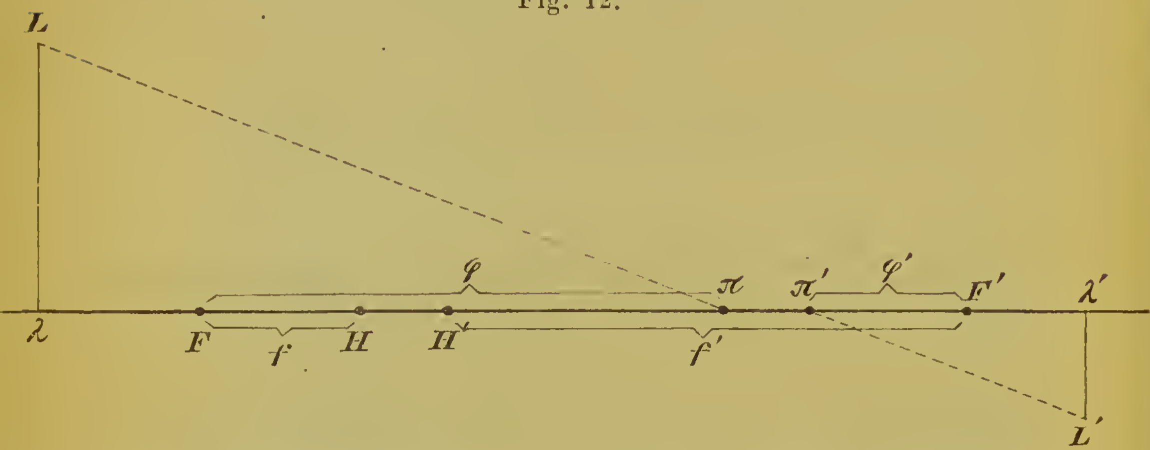
$$III. \quad (u-f)(u'-f') = ff'.$$

Hier sind v und v' die Abstände der Puncte von der Achse; ferner u und u' ihre Abstände von der einen und von der andern Hauptebene (Fig. 11).

Noch von einer andern Seite her lässt sich die Beziehung, welche zwischen zwei conjugirten Puncten L, L' stattfindet, in übersichtlicher Weise auffassen. Zu dieser neuen Auffassung werden wir dadurch gelangen, dass wir an Stelle der beiden Hauptpuncte H, H' zwei andere, ebenfalls feste Puncte π, π' einführen. Es sind dies, wie sogleich bemerkt werden mag, diejenigen Puncte, welche man die Knotenpuncte zu nennen pflegt.

An Stelle des Hauptpunctes H, welcher vom Brennpunct F die Entfernung f hat, mag (Fig. 12) ein Punct π eingeführt wer-

Fig. 12.



den, welcher von jenem Brennpunct irgend eine andere Entfernung φ besitzt. Gleichzeitig mag an Stelle des Hauptpunctes H', der von F' den Abstand f' besitzt, ebenfalls ein anderer Punct π' eingeführt werden, der von F' die Entfernung φ' hat.

Bisher haben wir die Lage von irgend zwei conjugirten Puncten L, L' immer auf die Hauptpuncte H, H' bezogen. Sind nämlich λ, λ' die Projectionspuncte von L, L' auf die Achse, so verstanden wir unter u, u' die Entfernung dieser Projectionspuncte von den Hauptpuncten. Gegenwärtig wollen wir an Stelle der Hauptpuncte die neuen Puncte π, π' einführen, an Stelle der

Entfernungen u, u' also diejenigen einführen, welche die Projectionspuncte λ, λ' von den neuen Puncten π, π' besitzen. Diese neuen Entfernungen mögen bezeichnet werden mit ω, ω'.

Nach der alten Bezeichnung ist die Länge der Linie λF gleich $\lambda H - f$ d. i. gleich $u - f$, nach der neuen ist sie gleich $\lambda\pi - \varphi$ d. i. gleich $\omega - \varphi$. Somit ergiebt sich:

$$u - f = \omega - \varphi.$$

Und ebenso erhält man:

$$u' - f' = \omega' - \varphi'.$$

Substituirt man diese Werthe von $u - f$, $u' - f'$ in die Formeln (7. I.), so ergiebt sich:

$$\frac{\omega - \varphi}{f} = \frac{v}{v'},$$
$$\frac{\omega' - \varphi'}{f'} = \frac{v'}{v}.$$

Hieraus folgt:

$$\omega = \frac{fv + \varphi v'}{v'},$$
$$\omega' = \frac{f'v' + \varphi' v}{v},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{fv + \varphi v'}{vv'}, \\[2ex] \dfrac{\omega'}{v'} = \dfrac{f'v' + \varphi' v}{vv'}. \end{cases}$$

Bis zu diesem Augenblick ist die Lage der neuen Puncte π, π' völlig der Willkühr überlassen gewesen; denn φ, φ' waren beliebig gewählte Constanten. Gegenwärtig mag über dieselben disponirt, und gesetzt werden:

$$\varphi = f', \quad \varphi' = f.$$

Die Formeln (8) nehmen dann folgendes Aussehen an:

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{fv + f'v'}{vv'}, \\[2ex] \dfrac{\omega'}{v'} = \dfrac{fv + f'v'}{vv'}, \end{cases}$$

und zeigen also, dass in diesem Fall

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\omega}{v} = \frac{\omega'}{v}$$

ist. Diese Gleichung (10) lässt sich so darstellen:

$$\frac{\lambda\pi}{\lambda L} = \frac{\lambda'\pi'}{\lambda' L'},$$

oder auch so:

$$\lambda\pi : \lambda L = \lambda'\pi' : \lambda' L'.$$

Sie zeigt demnach (Fig. 12), dass die Linie $L\pi$ parallel ist zur Linie $L'\pi'$.

Da wir $\varphi' = f$ gemacht haben, so ist $\pi' F' = HF$. Die Puncte π' und H liegen also (Fig. 12) symmetrisch in Bezug auf die beiden Brennpuncte. Und ebenso ergiebt sich, weil wir $\varphi = f'$ gemacht haben, dass die Puncte π und H' ebenfalls symmetrisch liegen zu den Brennpuncten. Also:

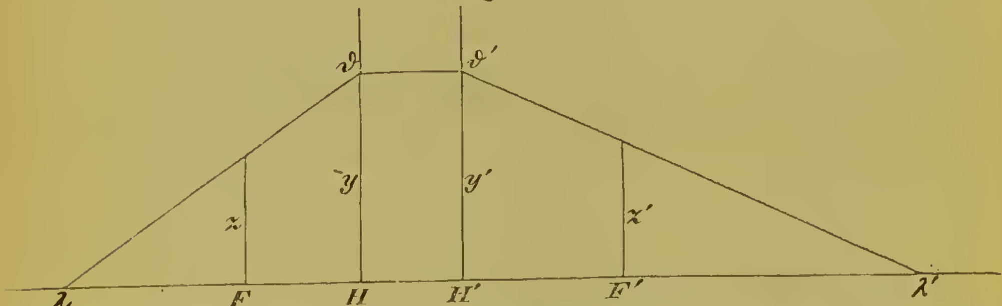
(11) . . . *Versteht man unter π, π' zwei auf der Achse befindliche feste Puncte, und zwar unter π denjenigen, welcher zum Hauptpunct H' symmetrisch liegt in Bezug auf die Brennpuncte, andrerseits unter π' denjenigen, welcher in Bezug auf die genannten Puncte symmetrisch liegt zum Hauptpunct H, und versteht man endlich unter L, L' irgend zwei einander conjugirte Puncte, so wird die Verbindungslinie $L\pi$ jederzeit parallel sein zur Verbindungslinie $L'\pi'$.*

Die hier bezeichneten festen Puncte π, π' nennt man die beiden Knotenpuncte.

§ 6. Ueber die Beziehung zwischen dem eintretenden und austretenden Strahl.

Es sei (Fig. 13) $\vartheta\vartheta'$ irgend eine Parallellinie zur Achse. Die beiden Puncte ϑ und ϑ', in welchen die Hauptebenen von dieser

Fig. 13.



Linie getroffen werden, sind dann conjugirte Puncte (Seite 24).

Ferner mögen λ und λ' irgend zwei auf der Achse liegende Puncte sein, die ebenfalls einander conjugirt sind.

Betrachtet man unter so bewandten Umständen die Linie $\lambda\vartheta$ als eintretenden Strahl, so wird der zugehörige austretende Strahl dargestellt sein durch die Linie $\vartheta'\lambda'$ (Satz Seite 21).

Wir errichten auf der Achse in den Haupt- und Brennpuncten vier Perpendikel, welche sämmtlich entweder bis zum eintretenden Strahl $\lambda\vartheta$, oder bis zum austretenden Strahl $\vartheta'\lambda'$ emporreichen sollen, und werden nun die Beziehungen untersuchen, welche zwischen diesen Perpendikeln stattfinden. Dieselben mögen für die Hauptpuncte mit y, y', für die Brennpuncte mit z, z' bezeichnet werden.

Für irgend zwei einander conjugirte Puncte gilt, was ihre Abstände von den Hauptebenen anbelangt, die (Seite 28 angegebene) Formel:

$$\frac{f}{u} + \frac{f'}{u'} = 1.$$

Wenden wir diese Formel auf die Puncte λ, λ' an, so erhalten wir:

$$\frac{f}{\lambda H} + \frac{f'}{\lambda' H'} = 1.$$

Fügen wir zu dieser Gleichung die (sich von selber verstehende) Gleichung

$$\frac{\lambda H}{\lambda H} + \frac{\lambda' H'}{\lambda' H'} = 2$$

hinzu, und subtrahiren wir sodann beide Gleichungen von einander, so ergiebt sich:

$$\frac{\lambda H - f}{\lambda H} + \frac{\lambda' H' - f'}{\lambda' H'} = 1,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(1) \quad \frac{\lambda F}{\lambda H} + \frac{\lambda' F'}{\lambda' H'} = 1.$$

Nun ist, wie sich (Fig. 13) durch Aehnlichkeit gewisser Dreiecke augenblicklich erkennen lässt:

$$\frac{\lambda F}{\lambda H} = \frac{z}{y} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda' F'}{\lambda' H'} = \frac{z'}{y'}.$$

Substituirt man diese Werthe in (1), so erhält man

$$(2) \quad \frac{z}{y} + \frac{z'}{y'} = 1,$$

oder, wenn man mit y multiplicirt, und zugleich beachtet, dass $y = y'$ ist:

$$(3) \quad z + z' = y = y'.$$

Wir gelangen demnach zu folgendem einfachen Resultat:

(4) . . . *Versteht man unter s irgend welchen eintretenden Strahl, unter s′ den zugehörigen austretenden Strahl, unter H, H′ und F, F′ die Haupt- und Brennpuncte, und bezeichnet man die in H und F auf der Achse errichteten, bis zum Strahl s emporreichenden Perpendikel mit y und z, andererseits die in H′ und F′ auf der Achse errichteten, bis zum Strahl s′ emporreichenden Perpendikel mit y′ und z′, so werden durch*

$$y = y' = z + z'$$

die einfachen Beziehungen dargestellt, welche zwischen diesen vier Perpendikeln stattfinden.

§ 7. Construction des Bildes für einen gegebenen leuchtenden Gegenstand.

Unter den durchsichtigen Körpern, aus welchen der von uns betrachtete Cylinder zusammengesetzt ist, haben wir den ersten mit M, den letzten mit M' bezeichnet.

Im Innern des Körpers M befinde sich irgend ein leuchtender Punct L. Die von diesem Punct ausgehenden Strahlen werden sich, nachdem sie den Cylinder seiner ganzen Länge nach durchlaufen haben, sämmtlich in ein und demselben Punct durchkreuzen, nämlich in demjenigen Punct L', welcher zu L conjugirt ist. Sie werden sich also, nachdem sie den Cylinder durchlaufen haben, so verhalten, als wären sie nicht von L, sondern von L' ausgegangen. Gelangen daher diese Strahlen in unser Auge, so werden wir nicht den Punct L, sondern den Punct L' wahrzunehmen glauben. Der Punct L' ist somit dasjenige Bild, welches uns in Folge der stattgehabten Lichtbrechungen an Stelle des gegebenen Punctes L entgegentritt. Demnach wird L' kurzweg das Bild von L genannt.

Wir wollen uns nun im Innern des Körpers M einen aus beliebig vielen, etwa aus 1000 Puncten zusammengesetzten leuchtenden Gegenstand denken, dabei aber voraussetzen, dass jene einzelnen Puncte, aus welchen der Gegenstand besteht, sämmtlich in ein und derselben Ebene liegen, und zwar in einer Ebene E, welche senkrecht steht zur Achse unseres Cylinders. Bezeichnen wir jene 1000 Puncte mit α, β, γ, ..., und die ihnen conjugirten Puncte mit α', β', γ', ..., so wird α' das Bild von α, β' das von β, γ' das Bild von γ sein, u. s. w. Das Bild des ganzen Gegenstandes (α, β, γ, ...) wird demnach dargestellt sein durch das Punctsystem (α', β', γ', ...).

Es handelt sich darum, das Bild (α', β', γ', ...) zu construiren, wenn der Gegenstand (α, β, γ, ...) gegeben ist. Wir wollen die Haupt- und Brennpuncte als gegeben betrachten, und nun kurz die einfachsten Methoden angeben, welche zu dieser Construction dienen können.

Da sich das Punctsystem (α, β, γ, ...) nach unserer Annahme in einer zur Achse senkrechten Ebene befindet, so gilt Gleiches auch von dem Punctsystem (α', β', γ' ...), wie aus einem früher gefundenen Satz (Seite 22) unmittelbar hervorgeht. Zufolge desselben Satzes müssen ausserdem beide Punctsysteme zu einander p e r s p e c t i v i s c h sein in Bezug auf irgend welchen noch unbekannten in der Achse liegenden Punct k. Die Verbindungslinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... gehen daher sämmtlich durch jenen unbekannten Punct k hindurch.

Um nun die Puncte α', β', γ', ... wirklich zu finden, muss man zunächst e i n e n von ihnen, z. B. den Punct α' construiren. Solches kann, da wir die Haupt- und Brennpuncte als bekannt voraussetzen, in sehr bequemer Weise bewerkstelligt werden mit Hülfe des früher (Seite 26) besprochenen Trapezes.

Ist aber α' gefunden, so ist damit auch diejenige Ebene E' bestimmt, in welcher s ä m m t l i c h e Puncte α', β', γ', ... liegen. Denn diese Ebene wird erhalten werden, wenn wir durch α' eine Ebene legen, die senkrecht zur Achse steht. Zugleich aber ist durch die Auffindung von α' auch der vorhin genannte unbekannte Punct k bestimmt. Denn dieser Punct ist derjenige, in welchem die Linie $\alpha\alpha'$ und die Achse einander schneiden.

Ziehen wir also schliesslich von den Puncten α, β, γ, ... Linien nach k, und verlängern wir diese Linien, bis sie die Ebene E' schneiden, so werden die so erhaltenen Schnittpuncte identisch sein mit den gesuchten Puncten α', β', γ', ...

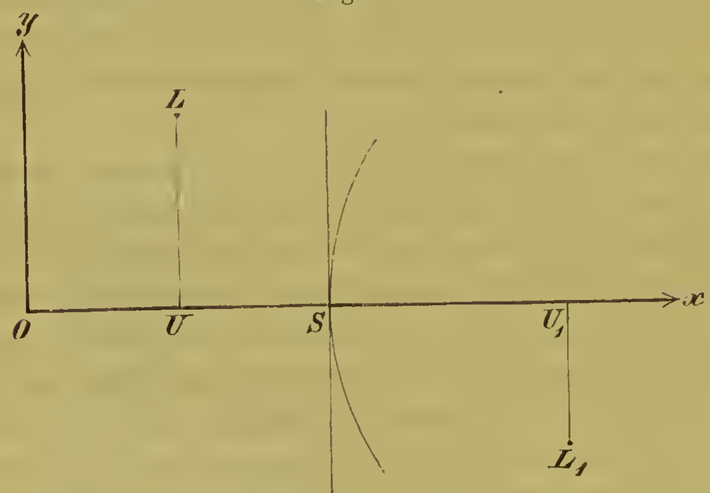
Wir sehen aus dieser Construction, dass Gegenstand und Bild einander vollkommen ähnlich sind, dass sie nämlich perspectivisch zu einander sind in Bezug auf den Punct k; und wir sehen ferner, dass sie von entgegengesetzter oder gleicher Lage sein werden, jenachdem der eben genannte Punct k zwischen Gegenstand und Bild oder ausserhalb dieses Raumes liegt.

§ 8. Ueber die beiden Brennweiten.

Zwischen den beiden Brennweiten des von uns betrachteten Cylinders findet eine überraschend einfache Beziehung statt, eine Beziehung, aus welcher z. B. hervorgehen wird, dass beide Brennweiten einander gleich sein müssen, sobald der erste und letzte Körper, nämlich M und M' aus ein und derselben Substanz bestehen.

Um näher hierauf einzugehen, müssen wir uns erinnern an unsere früheren Untersuchungen über eine einzige brechende

Fig. 14.



Fläche. Sind M, M_1 die Körper zu beiden Seiten dieser Fläche, sind ferner b, b_1 die Brennweiten der Fläche, und sind endlich L, L_1 zwei in Bezug auf M, M_1 einander conjugirte Puncte (Fig. 14), so finden, wie wir damals (Seite 17) gefunden haben, zwischen den Lagen von L und L_1 folgende Relationen statt:

$$(1) \ldots \quad \frac{b}{US} + \frac{b_1}{U_1S} = 1, \qquad b\frac{UL}{US} = b_1\frac{U_1L_1}{U_1S}.$$

Wir führen ein rechtwinkliges Coordinatensystem (x, y) ein, dessen Anfangspunct O irgendwo auf der Achse liegt, und dessen x Achse mit jener Achse zusammenfällt. Bezeichnen wir die Coordinaten von L mit x, y, die von L_1 mit x_1, y_1, endlich die Länge der Linie OS mit S selber, so ist:

$$US = S - x, \qquad U_1 S = x_1 - S$$
$$UL = y \qquad U_1 L_1 = - y_1.$$

Somit verwandeln sich die Formeln (1) in:

$$(2) \quad \ldots \quad \frac{b}{S-x} - \frac{b_1}{S-x_1} = 1, \quad \frac{by}{S-x} = \frac{b_1 y_1}{S-x_1}.$$

Sind ξ, η die Coordinaten irgend eines andern Punctes A, und ξ_1, η_1 die Coordinaten des ihm conjugirten Punctes A_1, so werden natürlich analoge Formeln gelten, nämlich folgende:

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{b}{S-\xi} - \frac{b_1}{S-\xi_1} = 1, \quad \frac{b\eta}{S-\xi} = \frac{b_1 \eta_1}{S-\xi_1}.$$

Wenn man die vier Formeln in (2) und (3) mit einander combinirt, und zwar die beiden Formeln links subtrahirt, andrerseits die beiden Formeln rechts multiplicirt, so erhält man:

$$(4) \quad \frac{b(x-\xi)}{(S-x)(S-\xi)} = \frac{b_1(x_1-\xi_1)}{(S-x_1)(S-\xi_1)}, \quad \frac{b^2 y\eta}{(S-x)(S-\xi)} = \frac{b_1^2 y_1 \eta_1}{(S-x_1)(S-\xi_1)}.$$

Dividirt man diese beiden Formeln durch einander, so ergiebt sich endlich:

$$(5) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{by\eta}{x-\xi} = \frac{b_1 y_1 \eta_1}{x_1 - \xi_1}.$$

Die Constanten b, b_1 sind die Brennweiten der hier betrachteten brechenden Fläche, und haben daher, wenn wir den Radius dieser Fläche mit a und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den Körpern M, M_1 mit m, m_1 bezeichnen, folgende Werthe (Seite 6):

$$b = \frac{am_1}{m - m_1},$$
$$b_1 = \frac{am}{m - m_1}.$$

Hieraus folgt $bm = b_1 m_1$, oder, was dasselbe ist:

$$b : b_1 = \frac{1}{m} : \frac{1}{m_1}.$$

Somit können in der Gleichung (5) die Constanten b und b_1 ersetzt werden durch $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{m_1}$. Hierdurch ergiebt sich:

$$(6) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{y\eta}{m(x-\xi)} = \frac{y_1\eta_1}{m_1(x_1-\xi_1)}.$$

Sind also, können wir sagen, m und m_1 die Lichtgeschwindigkeiten in den an einander grenzenden Körpern M und M_1, sind ferner x, y und x_1, y_1 zwei in Bezug auf diese Körper einander conjugirte Puncte, und sind endlich ξ, η und ξ_1, η_1 zwei andre solche Puncte, so wird jederzeit die Formel (6) stattfinden.

Eine mit (6) vollkommen analoge Formel wird natürlich stattfinden für je zwei auf einander folgende Körper des von uns betrachteten Cylinders.

Es seien x, y und ξ, η zwei beliebig gegebene Puncte; die zu diesen in Bezug auf die Körper M und M_1 conjugirten Puncte mögen (ebenso wie bisher) bezeichnet werden mit x_1, y_1 und ξ_1, η_1; die zu diesen letztern in Bezug auf die Körper M_1 und M_2 conjugirten Puncte mögen genannt werden x_2, y_2 und ξ_2, η_2; sodann mögen die zu diesen letztern in Bezug auf die Körper M_2 und M_3 conjugirten Puncte bezeichnet werden mit x_3, y_3 und ξ_3, η_3. In solcher Weise gehen wir in unserm Cylinder von Körper zu Körper weiter und weiter vorwärts und gelangen schliesslich zum letzten Körper, zum Körper M'. Diejenigen Puncte, mit welchen unsere beiden von x, y und ξ, η ausgehenden Punctketten in diesem Augenblick enden, mögen bezeichnet werden mit x', y' und ξ', η'. Zwischen diesen sämmtlichen Puncten werden sich Formeln aufstellen lassen, die mit (6) analog sind, und zwar ebenso viel Formeln, als brechende Flächen in unserm Cylinder vorhanden sind. Wir können, wie leicht zu übersehen ist, diese ganze Reihe von Formeln in folgender Weise zusammenfassen:

$$(7) \quad \frac{y\eta}{m(x-\xi)} = \frac{y_1\eta_1}{m_1(x_1-\xi_1)} = \frac{y_2\eta_2}{m_2(x_2-\xi_2)} = \dots\dots\dots = \frac{y'\eta'}{m'(x'-\xi')}.$$

Hier sollen m, m_1, m_2, ... m' der Reihe nach die Lichtgeschwindigkeiten für die Körper M, M_1, M_2, ... M' vorstellen. Wir erhalten somit, wenn wir in (7) nur das erste und letzte Glied ins Auge fassen:

$$(8) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{y\eta}{m(x-\xi)} = \frac{y'\eta'}{m'(x'-\xi')},$$

und gelangen daher zu folgendem merkwürdigen Satz:

(9) ... *Sind bei dem betrachteten Cylinder m und m' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes im ersten Körper*

M und im letzten Körper M', sind ferner x, y und x', y' irgend zwei in Bezug auf M und M' einander conjugirte Puncte, und sind endlich ξ, η und ξ', η' irgend zwei andere solche Puncte, so wird jederzeit die Gleichung stattfinden:

$$\frac{y\eta}{m(x-\xi)} = \frac{y'\eta'}{m'(x'-\xi')}.$$

Das hier zu Grunde gelegte Coordinatensystem besitzt eine x Achse, welche zusammenfällt mit der Achse des Cylinders, ist im Uebrigen aber willkührlich, also willkührlich in Bezug auf die Lage seines Anfangspunctes.

Wir wollen diesen Satz in Anwendung bringen auf einen gewissen speciellen Fall, nämlich auf den Fall, dass die Puncte ξ, η und ξ', η' in den beiden Hauptebenen liegen. Die Hauptebenen werden von jeder zur Achse parallelen Linie in zwei einander conjugirten Puncten geschnitten (Seite 24). Demnach wird (Fig. 15) der Punct ϑ conjugirt sein dem Punct ϑ'. Wir können demnach in der Formel (9) für ξ, η den Punct ϑ, und für ξ', η' den Punct ϑ' nehmen. Alsdann wird:

$$\xi = H, \qquad \xi' = H',$$
$$\eta = \Delta, \qquad \eta' = \Delta,$$

wo H, H' die Abstände der beiden Hauptpuncte vom Anfangspunct O vorstellen, und wo Δ die Entfernung der Linie $\vartheta\vartheta'$ von der Achse bedeutet. Durch Einsetzung dieser speciellen Werthe verwandelt sich die Formel (9) in:

(10) . . . . $$\frac{y\Delta}{m(x-H)} = \frac{y'\Delta}{m'(x'-H')},$$

oder, was dasselbe ist, in:

(11) . . . . $$\frac{y}{m(H-x)} = \frac{y'}{m'(H'-x')}.$$

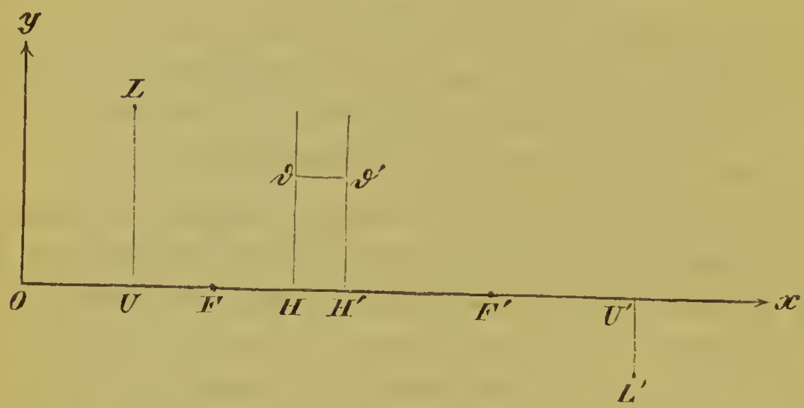
Bevor wir weitergehen, und diese Formel für unsere eigentlichen Zwecke verwenden, müssen wir uns an diejenigen Ergebnisse erinnern, zu welchen wir bereits früher in Betreff des hier betrachteten Cylinders gelangt sind.

Bezeichnen L und L' irgend zwei in Bezug auf M und M' einander conjugirte Puncte, und sind U und U' die Projectionen dieser Puncte auf die Achse (Fig. 15), so wird (Formel II S. 28) jederzeit folgende Relation stattfinden:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f\frac{UL}{UH} = f'\frac{U'L'}{U'H'},$$

wo f und f' die beiden Brennweiten des Cylinders sind. Wiederum legen wir das schon vorhin benutzte Coordinatensystem zu Grunde (Fig. 15). Die Coordinaten von L seien x, y, die von

Fig. 15.



L' seien x', y'; ferner mögen F, F' die Entfernungen der beiden Brennpuncte vom Anfangspunct sein; und endlich mögen, ebenso wie vorhin, H, H' diejenigen Entfernungen sein, welche die Hauptpuncte vom Anfangspunct haben. Alsdann wird:

$$\begin{aligned} f &= H - F, & f' &= F' - H', \\ UH &= H - x, & U'H' &= x' - H', \\ UL &= y, & U'L' &= -y'. \end{aligned}$$

Hierdurch geht die Formel (12) über in:

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{(H-F)y}{H-x} = -\frac{(H'-F')y'}{H'-x'}.$$

Für irgend zwei einander conjugirte Puncte x, y und x', y' wird gleichzeitig sowohl die Formel (11) als auch die Formel (13) gelten. Dividirt man beide Formeln durch einander, so ergiebt sich nun schliesslich folgende dritte Formel:

$$m\,(H - F) = -\,m'\,(H' - F'),$$

d. i.:

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad m\,(H - F) + m'\,(H' - F') = 0.$$

Die Constanten m und m' repräsentiren die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den Körpern M und M', und sind folglich jederzeit positiv. Somit ergiebt sich aus der vorstehenden Formel, dass von den beiden Differenzen

$$H - F \quad \text{und} \quad H' - F'$$

jederzeit die eine positiv, die andere negativ sein muss. Bezeichnet man, wie früher, die beiden Brennweiten des betrachteten Cylinders mit f und f', so ist $H - F = \pm f$, andrerseits $H' - F' = \pm f'$. Somit verwandelt sich die Formel (14) in:

$$\pm mf \pm m'f' = 0,$$

oder, weil m, m', f, f' ihrer Bedeutung zufolge lauter positive Grössen sind, in:

(15) . . . . $mf - m'f' = 0.$

Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

(16) . . . *Sind m und m' die Geschwindigkeiten des Lichtes in denjenigen beiden Körpern, welche den Anfang und das Ende des Cylinders bilden, so findet zwischen den beiden Brennweiten f und f' des Cylinders jederzeit die Relation statt:*

$$mf = m'f'.$$

Demnach werden beide Brennweiten einander gleich sein, sobald der erste und letzte Körper aus ein und demselben Stoff bestehen.

Ist $m = m'$, so verwandelt sich die Formel (14) in:

$$H - F + H' - F' = 0,$$

oder, was dasselbe ist, in:

(17) . . . . $H + H' = F + F'.$

H und H' sind die x Coordinaten der beiden Hauptpuncte; demnach ist $\frac{H + H'}{2}$ die x Coordinate desjenigen Punctes, welcher gerade in der Mitte zwischen beiden Hauptpuncten sich befindet. Ebenso ergiebt sich andrerseits, dass $\frac{F + F'}{2}$ die x Coordinate eines Punctes vorstellt, der mitten zwischen den beiden Brennpuncten liegt. Die vorstehende Gleichung (17) zeigt demnach, dass die beiden genannten mittleren Puncte mit einander zusammenfallen. Also:

(18) . . . *Bestehen der erste und letzte Körper des Cylinders aus ein und demselben Stoff, so werden die Hauptpuncte jederzeit symmetrisch liegen zu den Brennpuncten*). Die*

---

*) Demnach werden also in diesem Fall entweder beide Hauptpuncte zwischen den Brennpuncten, oder umgekehrt beide Brennpuncte

früher (Seite 30) erwähnten Knotenpuncte werden daher in diesem Fall identisch sein mit den Hauptpuncten.

§ 9. Ueber die experimentelle Bestimmung der Haupt- und Brennpuncte.

Sind L und L' irgend zwei einander conjugirte Puncte, und U, U' ihre Projectionen auf die Achse (Fig. 15), so gelten, wie wir früher (Seite 28) gefunden haben, folgende Relationen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{f}{UH} + \frac{f'}{U'H'} &= 1, \\ f\frac{UL}{UH} &= f'\frac{U'L'}{U'H'}. \end{aligned}$$

Legen wir wiederum ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen x Achse zusammenfällt mit der Achse des Cylinders, und bezeichnen wir die Coordinaten von L und L' mit x, y und x', y', so wird:

$$\begin{aligned} f &= H - F, & f' &= F' - H', \\ UH &= H - x, & U'H' &= x' - H', \\ UL &= y, & U'L' &= -y', \end{aligned}$$

wo F, F', H, H' die Abstände der Brenn- und Hauptpuncte vom Anfangspunct vorstellen. Hierdurch verwandeln sich die Formeln (1) in:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{H-F}{H-x} + \frac{H'-F'}{H'-x'} &= 1, \\ \frac{(H-F)y}{H-x} - \frac{(H'-F')y'}{H'-x'} &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man nun in experimenteller Weise für irgend einen beliebig gewählten Punct x, y den conjugirten Punct x', y', und

---

zwischen den Hauptpuncten liegen. Im Ganzen werden also, wenn wir die Brennpuncte F, F' als gegeben betrachten, vier verschiedene Lagen der Hauptpuncte H, H' möglich sein, nämlich folgende:

1) $F \;\ldots\; H \;\ldots\; H' \;\ldots\; F'$
2) $F \;\ldots\; H' \;\ldots\; H \;\ldots\; F'$
3) $H \;\ldots\; F \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; F' \;\ldots\; H'$
4) $H' \;\ldots\; F \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; F' \;\ldots\; H.$

Noch grösser wird natürlich die Anzahl der möglichen Anordnungen dann sein, wenn wir die hier gemachte Voraussetzung $m = m'$ fallen lassen, und einen Cylinder betrachten, in welchem der erste und letzte Körper aus verschiedenen Stoffen bestehen.

bestimmt man sodann für irgend einen andern Punct ξ, η ebenfalls den conjugirten Punct ξ', η', so werden die Formeln (2) sowohl für das eine als auch für das andere Punctpaar gültig sein. Man erhält somit im Ganzen vier Gleichungen, in welchen x, y, x', y', ξ, η, ξ', η' bekannt, nämlich experimentell bestimmt sind. Somit wird man diese vier Gleichungen benutzen können, um die vier Entfernungen H, H', F, F' zu berechnen, also benutzen können, um die Lagen der Haupt- und Brennpuncte zu ermitteln.

Bestehen der erste und letzte Körper des Cylinders aus e i n u n d d e m s e l b e n Stoff, ist also $m = m'$, so findet zwischen den Entfernungen H, H', F, F', wie wir kürzlich (Seite 39) gefunden haben, die Relation statt:

$$H - F + H' - F' = 0,$$

d. i.

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad H + H' = F + F'.$$

In diesem Fall braucht man also von den vorhin genannten vier Gleichungen nur d r e i zu benutzen, indem man als v i e r t e die Relation (3) hinzunimmt.